

UNIVERSIDAD ESTATAL A DISTANCIA  
SISTEMA DE ESTUDIOS DE POSGRADO



MAESTRÍA EN ADMINISTRACIÓN DE NEGOCIOS

TRABAJO FINAL DE GRADUACION

Toma de Decisiones con Criterios Múltiples: un  
resumen conceptual

Director  
MBA José Walter Orozco

Sustentante  
Marco Antonio Sanabria Aguilar

2006



A Maritza,  
Nicolle, Marco y Gabriel  
Que me hacen crecer, soñar y sentir más la vida

# Agradecimiento

- Al Maestro creador del universo y dueño de mi vida que me permite construir otros mundos mentales posibles.
- A mis padres, Ana Mercedes y Marco Antonio por el apoyo incondicional para continuar el camino del aprendizaje
- A Maritza por enseñarme que no hay límites, que lo que me proponga lo puedo lograr y que solo depende de mí.
- Al Magíster Jose Walter Orozco por su asesoría y dirección en el trabajo de graduación.
- A mis amigos, que por medio de las discusiones y preguntas, me hacen crecer en conocimiento.
- Y a todas aquellas personas que de una u otra forma, colaboraron o participaron en la realización de esta investigación, hago extensivo mi más sincero agradecimiento.

“Sabiduría es la habilidad para evaluar las opciones disponibles y las consecuencias de corto y largo plazo “

Russell Ackoff

# Índice

Índice de Tablas .....	8
Índice de Figuras .....	9
Resumen Ejecutivo.....	10
Toma de decisiones y los modelos de preferencias .....	11
Toma de decisiones en Costa Rica .....	17
Importancia de la toma de decisiones empresariales .....	18
Elementos de un análisis decisorio.....	20
Estructuración del proceso de toma de decisiones.....	23
Primera Etapa: Necesidad de Tomar una Decisión. ....	25
Segunda Etapa: Enumeración de los Cursos de Acción Disponibles. ....	25
Tercera Etapa: Evaluación de los Cursos de Acción Disponibles. ....	26
Cuarta Etapa: Decisión Provisional o Tentativa.....	26
Quinta Etapa: Compromiso y Ajuste a la Decisión.....	27
Soporte a la toma de decisiones.....	28
Conceptos básicos de los modelos de preferencias .....	29
Algunos modelos de preferencias .....	34
Fundamentos del Proceso Analítico Jerárquico.....	34
Fundamentos del Método Electra III .....	46
Fundamentos del Método Promethee.....	51
Fundamentos del Método MacBeth .....	55
Fundamentos del Método Munda .....	65
Conclusiones .....	73
Bibliografía.....	74
Anexos .....	76
Aplicación del método AHP.....	76
Problema de selección del trazado de un tramo de autopista.....	76
Aplicación del método Electra .....	79
Problema de selección de inversiones .....	79
Glosario Multicriterio.....	83
AGREGACIÓN.....	83
ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD.....	83
ANÁLISIS O EVALUACIÓN MULTICRITERIO.....	83
ATRIBUTOS O CRITERIOS .....	84
CRITERIO ESTRICTO.....	84
ÍNDICES BINARIOS DE PREFERENCIA.....	85
ÍNDICE MULTICRITERIO Y MULTIACTOR.....	85
MATRIZ DE VALUACIÓN, DE PUNTUACIÓN O DE DECISIÓN.....	85
MÉTODO ARIADNE.....	86
MÉTODO MACBETH.....	86
MÉTODOS COMPENSATORIOS Y NO COMPENSATORIOS .....	87
NORMALIZACIÓN .....	87

ORDENAMIENTO POR LA MEDIANA .....	88
OTROS MÉTODOS SIMPLES .....	89
PONDERACIÓN LINEAL .....	91
PREFERENCIAS BORROSAS .....	91
PROBLEMÁTICA DEL APOYO A LA DECISIÓN.....	92
RELACIÓN DE SUPERACIÓN .....	92
REVERSIÓN DEL ORDEN O DE RANGO.....	93
SEUDOCRITERIO .....	94
TODIM.....	95
TOMA DE DECISIONES MULTICRITERIO.....	96
TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution) .....	96
UTILIDAD MULTIATRIBUTO.....	98

## Índice de Tablas

Tabla 1: Escalas de comparaciones AHP.....	40
Tabla 2. Matriz de comparaciones biunívocas .....	41
Tabla 3. Matriz de comparaciones biunívocas valorizada .....	41
Tabla 4. Matriz de reciprocidad .....	43
Tabla 5. Matriz de índices aleatorios .....	44
Tabla 6. Matrices de comparaciones biunívocas y vectores característicos.....	45
Tabla 7. Matriz de evaluación – método Promethee.....	51
Tabla 8. Matriz de ponderaciones – método Promethee .....	52
Tabla 9. “ranking” parcial – cuando se permite la relación R. ....	55
Tabla 10. Matriz de juicios categóricos .....	59
Tabla 11. Resumen de comparaciones biunívocas de las alternativas ficticias.....	64
Tabla 12. Matriz de relaciones de preferencia. ....	68

## Índice de Figuras

Figura 1. Modelo conceptual AHP .....	36
Figura 2. Jerarquización AHP .....	38
Figura 3. Funciones de preferencias.....	53

## Resumen Ejecutivo

El análisis multicriterio constituye una forma de modelizar los procesos de decisión, en los que entran en juego: una decisión a ser tomada, los eventos desconocidos que pueden afectar el o los resultados, los posibles cursos de acción, y el o los resultados mismos. Mediante los modelos multicriterio el decisor podrá estimar las posibles implicaciones que puede tomar cada curso de acción, para obtener una mejor comprensión de las vinculaciones entre sus acciones y sus objetivos.

Los métodos y modelos para la toma de decisiones con criterios múltiples, proveen herramientas de utilidad a la hora de analizar problemas complejos. Los procesos de toma de decisiones han sido analizados y modelados matemáticamente, para dotar a las personas encargadas de tomar decisiones, de herramientas que les permitan contar con una mejor visualización de los factores que intervienen en los procesos, así como de las preferencias existentes. Los procesos de decisión de las empresas contemporáneas involucran la interrelación de tres sistemas con objetivos, muchas veces contrapuestos: el sistema económico, el sistema social y el sistema medioambiental. La interrelación de una tarea compleja que requiere de métodos sistemáticos. Dentro de la literatura relacionada con modelos de preferencia se han identificado cinco importantes modelos específicos, cuyos marcos conceptuales son comentados brevemente: El proceso analítico jerárquico, el método Electra III, el método Promethee, el método MacBeth y el método NAIADE. Al final, en los anexos se incluyen dos ejemplos de los primeros dos métodos, los cuales son los de uso más frecuente y común, en las organizaciones.

## **Toma de decisiones y los modelos de preferencias**

La toma de decisiones se define como la selección de un curso de acciones entre alternativas; es decir, que existe un plan, un compromiso de recursos de dirección o reputación (Gallagher, 2004).

Los procesos de toma de decisiones se han venido analizando tradicionalmente con base en un paradigma que puede esquematizarse de la siguiente forma:

- Se selecciona el criterio bajo el cual se decide la mejor solución.
- Se define el conjunto de restricciones que limitan la solución del problema.

Seguidamente, utilizando técnicas más o menos complejas, se procede a buscar entre las soluciones, aquella que obtenga un mejor valor del criterio seleccionado; a esto se le denomina solución óptima.

Las soluciones posibles, de acuerdo con esta estructura son aquellas que den cumplimiento al conjunto de restricciones del problema y que representen los mejores valores del criterio seleccionado por el decisor.

Este problema posee una gran solidez desde el punto de vista lógico; sin embargo, posee importantes debilidades que lo desvían considerablemente de los procesos reales de toma de decisiones empresariales. En la realidad, los decisores no están interesados en

buscar la solución con respecto de un único criterio, sino que desean efectuar esta tarea con arreglo a diferentes criterios que reflejen sus preferencias.

La toma de decisiones es la principal actividad para cualquier administrador. Sea en el sector público o en el sector privado, la tarea de tomar decisiones constituye la actividad cotidiana más difícil y riesgosa, pues involucra la necesidad de evaluar opciones y elegir, de entre todas las posibilidades, aquella que mejor se adecue a los objetivos perseguidos.

Una mala decisión puede llegar a perjudicar los intereses de la entidad, en virtud de la cual la decisión es tomada, afectando el accionar de individuos, empresas, países e incluso de la humanidad entera.

La manera como un proceso de decisión es llevado a cabo, depende de las condiciones del entorno. A gran escala y en condiciones democráticas, por ejemplo, el proceso de decisión más común es aquel que capta a través de métodos de votación, las preferencias individuales de cada miembro integrante de un grupo, para luego emitir un juicio tendente a reflejar, de la mejor manera posible, la opinión global de aquel grupo. A pesar de que los sistemas de elección por medio del voto son comunes en muchos países, es interesante observar que los procesos de recuento de votos, no son los mismos en todas partes (Bouyssou, 2000). Por lo general, lo que se persigue en un proceso de votación, es elegir aquella opción que refleje la opinión de la mayoría, entendiendo que la mejor opción sería aquella que goce del apoyo del subgrupo más numeroso. A veces se exige que dicho

subgrupo cuente con más de la mitad de los miembros del grupo, a lo que se llama "mayoría absoluta". Estudiosos de las Teorías de Elección Social han demostrado, que algunos procesos de elección por mayoría absoluta tienen serias deficiencias en cuanto a reflejar la verdadera preferencia general de un conjunto de personas.

Para entender mejor lo anterior, se presenta el siguiente ejemplo: Seis candidatos A, B, C, D, E y F pretenden ser elegidos por un grupo numeroso de personas. Llevando a cabo el proceso de votación, en el proceso de recuento se ve, que el candidato A, goza del 51% de los votos, de modo que es elegido vencedor. Sin embargo, un análisis más profundo muestra, que de haberse pedido a los electores que expresen su preferencia de mayor a menor, los datos hubieran sido los siguientes: 26% eligen ABCDEF; 25% eligen ABDECF; 18% eligen BCDEFA; 15% eligen EBACDF; 10% eligen CBEAFD y 6% eligen DBCAEF. De esta distribución de preferencias se puede ver, que si bien el 51% de los votantes considera que A es la mejor opción, 49% considera que B, es mejor que A (18+15+10+6), así como que este último, lejos de ser el mejor, representa más bien la peor opción en el 49% de los casos. En contraste, 100% de los electores considera que B, es una opción razonablemente buena, pues lo han colocado si no en el primer lugar, en el segundo. Como se puede ver, el hecho de que A sea la mejor opción no es obvio, pese a que este ha sido elegido por mayoría absoluta. Parecería más bien ser que el candidato B, cuenta con mayor apoyo que el candidato A.

Cuando la toma de decisiones recae en una sola persona, el proceso mental, mediante el cual la decisión es tomada, se desarrolla con base en la información cognoscitiva que proviene de las propias

experiencias personales de los individuos, además de otras fuentes de información externa como son, opiniones de colegas y expertos o datos recopilados para el fin en particular. La dificultad radica, muchas veces, en la inexactitud de los datos, la complejidad en el análisis de las opciones, la subjetividad inherente a la definición de prioridades y, por si fuera poco, en las trampas mentales, en las que nuestro cerebro puede hacernos caer, si es que no tenemos el cuidado de evitarlas (Hammond, 1998). Esto puede ilustrarse mejor con el siguiente ejemplo: muchos administradores despliegan marcada preferencia en relación con aquellas opciones que perpetúan el estatus-quo. Al parecer, esto se debe a un deseo instintivo de proteger el ego. Muchos experimentos han demostrado esta trampa mental. Ejemplo de ello es el conocido experimento en el que cada uno de los miembros de un grupo de personas recibe un regalo, que le es entregado de forma aleatoria.

Todos los regalos están empaquetados en cajas iguales y todos tienen el mismo valor, pero su contenido no es el mismo. Se les dice que aquellos que así lo deseen pueden cambiar de regalo, siempre y cuando lo hagan antes de ver su contenido. De ser cierta la hipótesis de que es igualmente probable, que una persona que ha recibido su regalo decida cambiarlo o no, aproximadamente la mitad de ellos tendrían que decidir cambiar su regalo. El hecho de que sólo uno de cada diez decidiera hacerlo demuestra la tendencia hacia el estatus-quo como una trampa mental. Al igual que la trampa del estatus-quo, existen otras trampas mentales que muchas veces impiden que el directivo sea totalmente ecuánime a la hora de evaluar alternativas. Por esta razón, resulta de gran utilidad en problemáticas complejas,

sistematizar los procesos de decisión y generar métodos de visualización y revisión de preferencias emitidas.

Una gran parte de las decisiones son tomadas con base en estimaciones. Cuando la problemática analizada es demasiado compleja como para utilizar estimaciones "a priori", se recurre al uso de indicadores con el objetivo de contar con cifras que den información sobre el estado de cosas. Así, la percepción que un individuo pueda tener acerca de cierta realidad, depende muchas veces de factores exógenos. Ciertos datos que pretenden mostrar el estado de cosas en la realidad actual, no siempre la reflejan con certeza. Ejemplo de ello son los indicadores utilizados para describir variadas circunstancias; como por ejemplo el coeficiente de inteligencia (IQ), el producto interno bruto (PIB), el índice inflacionario, la cantidad de camas de hospital per cápita, el índice de precios al consumidor, la tasa de retorno, y otros, los cuales siempre han de estar sujetos a la polémica acerca de su significado real y la medida en la que son capaces de reflejar con certeza aquello que pretenden mostrar. Al ser los índices sólo estimaciones de la realidad, siempre han de estar sujetos a cierto grado de incertidumbre referente a su validez en reflejar aquello que pretenden mostrar (Bouyssou, 2000).

Existen diversos tipos de incertidumbre que pueden estar presentes en un proceso de toma de decisiones. El tipo de incertidumbre que más atención ha recibido de parte de la comunidad científica es aquel que puede ser representado en forma de error o rango de validez de un resultado y por lo tanto, susceptible a ser analizado por medio de la teoría de las probabilidades. Cuando hablamos de la probabilidad de que suceda un acontecimiento, nos referimos a una estimación acerca

de la eventualidad de su ocurrencia, emitida con base en la ocurrencia de eventos similares en el pasado o con base en experimentos repetibles, que nos den una idea del posible resultado de un evento real.

Sin embargo, existen otros tipos de incertidumbre que hacen de un proceso de decisión un evento sumamente complicado. Los datos pueden ser ambiguos, vagos o incompletos. La realidad que se quiere observar puede ser de naturaleza tal, que no admita descripción numérica. El confort, el bienestar, la vulnerabilidad o la paz social, son conceptos de naturaleza subjetiva de difícil interpretación numérica. Otra importante fuente de incertidumbre son las estimaciones sobre el comportamiento de cierto aspecto en el futuro. Predicciones de ventas futuras, desarrollo de tecnologías y el incremento de la población, entre otros, son datos comúnmente utilizados en procesos de toma de decisiones. Los métodos probabilísticos mencionados son normalmente utilizados para predecir dichos acontecimientos. Cuando el acontecimiento no es repetible, es decir, cuando la probabilidad no puede ser determinada con base en experimentos, se utilizan estimaciones subjetivas de la realidad, emitidas por expertos, quienes expresan su parecer sobre la eventualidad de la ocurrencia futura del acontecimiento, generalmente por medio de una cifra entre cero y uno. Pero sobre este punto surge la pregunta de si el ser humano es capaz de expresar su sentir por medio de cifras. En el fondo, lo que se hace es medir la incertidumbre de ocurrencia de un evento con una cifra que lleva inherente cierto grado de incertidumbre también. Parecería ser que lo natural no es cuantificar la incertidumbre, sino más bien comparar alternativas de acuerdo con percepciones de preferencia subjetivas mediante el uso de frases, en vez de números. Este

concepto es uno de los pilares de algunas de las teorías más interesantes de los modelos de preferencia y de otras técnicas matemáticas como la teoría de los conjuntos difusos.

## **Toma de decisiones en Costa Rica**

El proceso de toma de decisiones constituye uno de los rasgos más significativos para caracterizar una organización, porque en él se resume su cultura y sus paradigmas administrativos. En las organizaciones costarricenses, por lo general, no se lleva a cabo una búsqueda sistemática de alternativas, sino que se procede a buscar las más obvias y familiares.

Como las empresas dedican casi todo su tiempo y sus recursos a la realización de los procesos de transformación directamente relacionados con la elaboración de sus productos y no están orientadas hacia la innovación ni el perfeccionamiento, los problemas que perciben y por consiguiente, las decisiones que toma, son rutinarias y se basan en la experiencia y en la memoria personal de los ejecutivos.

Una deficiencia en la toma de decisiones notoria es la ausencia de mecanismos de seguimiento y evaluación. Esta carencia priva a la organización de oportunidad, de apreciar el impacto de sus decisiones y de aprender de su experiencia. La toma de decisiones en torno a la gestión de los recursos se encuentra centralizada. Tanto la descentralización en la toma de decisiones como la participación de los diferentes actores en la gestión de los recursos continúan siendo la excepción y no la regla (Aguilar, 1999).

## **Importancia de la toma de decisiones empresariales**

A pesar de la creciente aplicación de las técnicas matemáticas en el ámbito empresarial internacional aún existen limitaciones en su introducción de dichas técnicas. Esto motivado inicialmente por la imposibilidad de contar con medios de cómputos potentes y software especializados, que por su alto costo no era posible adquirir, además de la poca cultura y formación de los decisores; entonces se realiza el proceso de toma de decisiones empíricamente, basado en la experiencia del factor humano que participa en la tarea.

Sin embargo, con todos los acontecimientos de los últimos años, la urgente necesidad de formar organizaciones eficientes, la responsabilidad de ahorrar recursos energéticos, la necesidad de utilizar racionalmente los recursos, para dar satisfacción a un cliente cada vez más exigente, consciente y preparado, ha provocado la necesidad de cambiar el paradigma decisional de un enfoque de optimización, a un enfoque multicriterio donde se obtienen soluciones que modelan racionalmente la forma de actuar del decisor. Todo esto debido a que lo fundamental no es abordar técnicas o herramientas que permitan obtener un ahorro en cualquier dirección de una empresa, sino buscar una solución en la cual se reduzcan los costos totales y se mejore el servicio, de aquí se deduce, que no se puede mantener como un objetivo del diseño de rutas de distribución minimizar los costos, sino también elevar la calidad del servicio al cliente; aspecto que no se ha tenido en cuenta hasta el momento.

La actividad de las empresas se desarrolla en el seno de la realidad circundante, que es el entorno en el cual se insertan; este entorno

influye de forma decisiva en su funcionamiento, ya que en gran medida el mayor o menor éxito de estas, dependerá de su acierto en relacionarse adecuadamente con el conjunto de elementos externos.

El entorno actual se ha caracterizado por una gran incertidumbre, debido a la mayor crisis económica que ha tenido lugar en la historia de la sociedad. En esta etapa es donde se reconoce cada vez más la influencia del entorno en la gestión empresarial, controlando las acciones de los proveedores, distribuidores y clientes, con el fin de ajustar las tasas de producción a la demanda final, para reducir los inventarios, los costes totales y acortar los tiempos de entrega.

En la región, hasta aproximadamente un par de décadas atrás, funcionaba bajo un modelo de productividad donde se ponía énfasis en la cantidad de productos por producir, existiendo una formación administrativa verticalizada. A los jefes de producción solo les interesaba producir, sin tener en cuenta la demanda de los clientes, que los productos pasaran a ser obsoletos, lo que provocaba que las entidades no fueran rentables. El deslizamiento de la moneda local con respecto del dólar norteamericano, sumerge al país en una situación económica asfixiante y esto, unido a las características del entorno requiere un cambio de enfoque en la gestión de nuestras empresas: pasar de la filosofía de vender productos al cliente, a la de satisfacer las necesidades del cliente; esta es una filosofía de servicio, pasando de un modelo de Productividad a uno de Competitividad, con una formación administrativa por objetivos, participativa, donde lo más importante radia en dar una respuesta rápida al cliente (Aguilar, 1999).

Como se ha visto hasta el momento, un proceso de decisiones puede presentar variados inconvenientes y dificultades, que justificarían el desarrollo de métodos y modelos científicos, con el objetivo de dotar al directivo de adecuadas herramientas de análisis de los elementos que intervienen en el proceso de decisión. La naturaleza subjetiva de la realidad y su incertidumbre inherente, los pseudo-razonamientos y trampas mentales, así como la dificultad que conlleva definir criterios y opciones, son todas buenas razones para utilizar métodos sistemáticos en los procesos de toma de decisiones, cuando la complejidad de los mismos y la importancia de sus consecuencias, así lo justifiquen.

## **Elementos de un análisis decisorio**

Una acción de toma de decisiones surge de la necesidad de resolver algún problema. Dependiendo de la gravedad de las consecuencias de la decisión y de la complejidad del estado de la situación, será necesario un proceso sistemático de análisis; de tal manera, que sea posible vislumbrar con la necesaria claridad, la problemática que ocupa. En algunas ocasiones, la simplicidad de los asuntos por analizar y la obviedad de la importancia relativa de las posibilidades, ocasionarán que la decisión sea tomada directamente, sin la necesidad de un análisis metódico. El presente ensayo tiene la finalidad de comentar métodos para la toma de decisiones, que sean útiles en casos en donde la elección de la alternativa correcta presenta la complejidad que justifique el uso de dichos modelos de decisión.

Todo proceso de decisión cuenta con ciertos elementos comunes, que es necesario identificar para lograr un correcto esquema del problema.

La palabra *problema* se define semánticamente como “una cuestión a la que se busca una explicación o respuesta adecuada.” Por lo tanto, se denomina “problema” al asunto que se desea resolver con un proceso de toma de decisiones. *Problemática* es un conjunto de problemas, de manera que designaremos así a la interrelación de aquellas cuestiones que debemos resolver en el proceso. Generalmente, los problemas son identificados a raíz de la existencia de alguna *necesidad insatisfecha* y sentida por un grupo de personas, que ejercen cierta influencia en el entorno de acción de la entidad que tiene a su cargo la resolución del problema.

Se llamará *involucrado* a todo aquel grupo de personas que se vea afectado por las consecuencias de la decisión tomada o que pueda afectar de alguna manera, el proceso de la toma de decisiones. Estos grupos de involucrados pueden estar compuestos por un solo individuo o por varios individuos que tengan intereses comunes, como en el caso de accionistas de empresas, organizaciones laborales o grupos sociales, por mencionar algunos. Aquellos grupos involucrados que tengan la facultad de intervenir directa o indirectamente en el proceso de la toma de decisiones, serán llamados *actores* de la decisión. Los grupos de involucrados que no intervengan en la toma de decisiones, pero que se vean afectados por el resultado de la misma, serán llamados *involucrados pasivos*. Así, el conjunto de los grupos de involucrados se divide en un subconjunto de actores y un subconjunto de involucrados pasivos.

Toda decisión tendrá que ser tomada por alguien. Un individuo o un conjunto de individuos que tengan la potestad y la libertad de acción

para llevar a cabo aquello que se decida. Se llamará *directivo* a este individuo o grupo de individuos, encargado de tomar la decisión y lo denotaremos como  $D$ .

Los otros dos elementos que necesariamente forman parte de un proceso de decisión son: los criterios y las alternativas. Se llamará *alternativa* a aquella acción u objeto de decisión que constituya una opción para la solución del problema planteado. El término alternativa podría ser reemplazado por los términos escenario, plan, programa, proyecto, propuesta, variante, "dossier", operación, inversión, solución o candidato, dependiendo de la situación. Formalmente, podemos definir el conjunto de acciones  $A = \{a_1, \dots, a_i, \dots, a_n\}$ , como el conjunto de objetos, decisiones, candidatos, entre otros, a ser evaluados durante el proceso de toma de decisiones. Este conjunto puede estar especificado mediante una lista de sus miembros, cuando esto sea posible, o mediante las propiedades que caracterizan a sus miembros, cuando el número de estos sea demasiado grande o infinito.

El propósito de un proceso de toma de decisiones radica en evaluar cada uno de los elementos del conjunto de alternativas con respecto de la consecución de un objetivo principal, el cual estará relacionado con la solución del problema planteado. Sin embargo, normalmente existen varios factores o puntos de vista, diferentes en su naturaleza, que intervienen en la problemática a ser analizada. Dado que la palabra *criterio* está definida como "la norma intelectual para juzgar o para decidir", se llamará así a todo aquel factor o punto de vista, que deba ser considerado en el proceso de decisión, con el objeto de solucionar el problema planteado, y se denota de forma genérica como

$g_j$ . El conjunto de criterios será llamado *criteriología* y estará denotado por  $G = \{g_1, \dots, g_j, \dots, g_m\}$  (Gallagher, 2004).

Dependiendo del modelo empleado en la evaluación de las alternativas con respecto de los diferentes criterios, se tendrá que definir un conjunto de indicadores de desempeño o “performances” de cada alternativa, con respecto de cada uno de los criterios. Este conjunto estará denotado por  $G_{a_i} = \{g_1(a_i), \dots, g_j(a_i), \dots, g_m(a_i)\}$ . De este modo, el elemento  $g_j(a_i)$  representa el desempeño de la alternativa  $a_i$  con respecto del criterio  $g_j$  (Gallagher, 2004).

En algunos casos (en algunos modelos) se podrá definir cierta *ponderación relativa* respecto de la importancia de las alternativas con respecto de un criterio definido.

Se denotará  $P_i = \{p_j(a_1), \dots, p_j(a_i), \dots, p_j(a_n)\}$  al conjunto de dichas ponderaciones relativas respecto al criterio  $g_j$  (Gallagher, 2004).

Cuando se trate de la ponderación general, se denotará simplemente como  $P = \{p(a_1), \dots, p(a_i), \dots, p(a_n)\}$  (Gallagher, 2004).

## **Estructuración del proceso de toma de decisiones**

Así como pueden identificarse los elementos que intervienen en un proceso de toma de decisiones, también pueden esquematizarse las diferentes fases que componen dicho proceso.

Más que una actividad, la toma de decisiones es un proceso; esto es, en lugar de un hecho puntual, aislado, transcurre alrededor de una serie de fases o etapas interconectadas (Marín-Zamora, 1998).

No obstante, ante una situación de toma de decisiones las personas no actúan necesariamente de una manera metódica, desde la primera hasta la última fase; algunas parecen progresar linealmente, mientras que en otras se producen grandes fluctuaciones.

Cada fase supone la presencia de ciertas actitudes y la realización de diversas tareas, cumplidas las cuales se avanza hacia la fase subsiguiente. Si la persona omite cualquiera de ellas antes de comprometerse con una opción particular, o lleva a cabo alguna(s) descuidadamente, se dificulta la toma de una decisión acertada.

Los teóricos de la elección vocacional -entre ellos Super, Ginzberg y Tiedeman- la conciben como un proceso continuo que evoluciona a través de cierto número de etapas. Otros investigadores, al estudiar la toma de decisiones generales, la conciben también como un proceso; entre ellos Irving Janis quien propone un modelo de cinco etapas principales que llevan a una decisión estable, y Theodore Rubin, que delinea un proceso conformado por ocho fases (Buchanan, 2006).

Se ha realizado una integración personal de los planteamientos de los dos últimos autores, para elaborar lo que - a juicio de los escritores contemporáneos - resume el proceso de toma de decisiones, a lo largo de cinco etapas (Buchanan, 2006):

## **Primera Etapa: Necesidad de Tomar una Decisión.**

La toma de decisiones comienza cuando una persona se enfrenta con una nueva situación que implica amenazas (por ejemplo, someterse a una cirugía o dejar de tomar, por razones de salud) u oportunidades (tal como radicarse en otra ciudad, elegir una carrera o contraer matrimonio). Para que sea una situación de decisión debe presentarse la posibilidad de escoger -por lo menos- dos opciones.

Una actitud deseable en esta fase consiste en examinar si la probable amenaza u oportunidad, es lo suficientemente importante como para justificar el esfuerzo de tomar una decisión al respecto. Si la respuesta es negativa, la persona continuará con su línea de conducta habitual; pero si es afirmativa, aceptará el reto y optará por otra línea de acción, continuándose así el progreso a lo largo de las posteriores etapas.

## **Segunda Etapa: Enumeración de los Cursos de Acción Disponibles.**

Una vez aceptado es necesario adoptar una decisión, se analizan los objetivos relacionados con ella y se buscan los cursos de acción disponibles para lograr los objetivos relacionados con la decisión.

La actitud provechosa debe ser de apertura, flexibilidad, libertad y creatividad, para generar opciones que permitan contar con una lista lo suficientemente amplia. Conviene darles atención a todas las opciones que surjan, por ridículas, incoherentes e improbables que resulten más tarde, evitando que una evaluación racional y objetiva desempeñe algún papel.

La ayuda externa puede ser útil, siempre que la persona no descuide su propia lista de opciones y no se le imponga una opción que ella no se haya formulado.

### **Tercera Etapa: Evaluación de los Cursos de Acción Disponibles.**

En esta etapa se estudia cuidadosamente, la lista generada en la etapa anterior. Se dejan fluir libremente los sentimientos y pensamientos que suscita cada una de las opciones, se analizan y valoran los mismos, y se establece una relación entre las opciones y las prioridades personales. En otras palabras, se consideran las ventajas y limitaciones de cada alternativa.

A diferencia de la etapa anterior, acá debe tomar lugar una evaluación racional y objetiva. La tarea implicada tiene que ver con la recolección y valoración de información personal (a través de la autoexploración y autoanálisis) e información externa, bien sea social, ocupacional o educativa, dependiendo de la decisión involucrada, se requiere la participación activa de la persona que elige, en la búsqueda de la información.

### **Cuarta Etapa: Decisión Provisional o Tentativa.**

Luego de evaluar cada curso de acción se cuenta con una opción preferida; la atención se centra sobre ésta; se percibe como la más idónea y se descartan las otras opciones para allanar el camino a la que se ha elegido.

La persona considera cómo ponerla en práctica y cómo transmitir a otros la intención de hacerlo. Antes de permitir que otros conozcan la línea de acción que ha elegido -especialmente si ésta es polémica, como renunciar al empleo- elabora estrategias para asegurar el éxito de la nueva decisión y evitar la desaprobación de los demás. Además, reexamina la información recogida sobre probables dificultades prácticas para implementar la decisión, piensa en cómo vencerlas y formula planes por si las pérdidas llegan a materializarse.

### **Quinta Etapa: Compromiso y Ajuste a la Decisión.**

En esta etapa se lleva a la práctica la decisión provisional. La opción electa se convierte en acción; es decir, se la dota de sentimientos y pensamientos, se invierte tiempo y energía en ella, y se rechazan finalmente por completo las opciones no electas. La persona se muestra satisfecha con la opción electa y la lleva a cabo con optimismo. Se producen sentimientos de bienestar, seguridad y autoconfianza.

Si ocurren contratiempos menores, la persona puede vacilar temporalmente, pero lleva a cabo su decisión. Pero si se presentan desafíos, pérdidas o insatisfacciones más serias, se recorren de nuevo las sucesivas etapas para buscar una opción mejor, aunque esta vez; con la ventaja que supone la experiencia positiva, producto del aprendizaje obtenido.

## **Soporte a la toma de decisiones**

Un modelo de preferencias NO es una caja negra. Proveer soporte en el desarrollo de un proceso de decisión involucra mucho más que la mera aplicación de herramientas técnicas, para “resolver” algún problema de características bien definidas. Un proceso de soporte en la toma de decisiones es la actividad efectuada por un facilitador, cuyo objetivo radica en aportar claridad en un proceso de decisión que se inicia pobremente estructurado, mediante el uso de adecuadas herramientas técnicas y metodológicas. Los modelos de decisión son modelos matemáticos, que valga la redundancia, ayudan al facilitador a ayudar al directivo a tomar una decisión. Un proceso de soporte a la toma de decisiones es casi un arte en el cual intervienen, tanto las cualidades técnicas del facilitador, como sus condiciones de trato y comportamiento, para lograr una actitud de cooperación y honestidad entre quienes intervienen en el análisis de la situación y la toma de decisiones propiamente dicha. El facilitador deberá además, adquirir el conocimiento básico requerido para comprender a cabalidad el asunto que es sujeto de análisis. Un proceso de soporte a la toma de decisiones no es la mera aplicación de un modelo matemático, con la finalidad de tomar una decisión con base en los resultados del modelo, sino más bien, es la estructuración de una problemática con la finalidad de brindar, mediante herramientas técnicas, claridad acerca de la conveniencia de escoger una de las opciones disponibles.

# Conceptos básicos de los modelos de preferencias

Todo proceso de decisión involucra el acto de comparar. Cuando se comparan dos opciones  $(a, b)$ , el resultado de la comparación puede ser uno de los siguientes enunciados (Vince,1992):

- "prefiero  $a$  que  $b$ "
- "soy indiferente entre  $a$  y  $b$ "
- "no puedo o no quiero comparar  $a$  y  $b$ "

Formalmente, podemos adoptar la siguiente simbología:

$$\begin{aligned} \forall a, b \in A: \quad & aPb \text{ si } a \text{ es estrictamente preferido a } b \\ & aIb \text{ si } a \text{ y } b \text{ son equivalentes (relación de indiferencia)} \\ & aRb \text{ si } a \text{ y } b \text{ son incomparables} \end{aligned}$$

$P$ ,  $I$  y  $R$  representan lo que se conoce como "relaciones de preferencia".

Para explicar el concepto de "relación" se presenta el siguiente ejemplo:

Existen dos conjuntos  $A$  y  $B$ , tal que

Conjunto  $A$ : {mujer<sub>1</sub>, mujer<sub>2</sub>, mujer<sub>3</sub>}

Conjunto  $B$ : {hombre<sub>1</sub>, hombre<sub>2</sub>, hombre<sub>3</sub>}

Entre los elementos del conjunto  $A$  y los del conjunto  $B$ , pueden formarse pares de elementos que tengan la característica de haber suscrito un contrato legal denominado "matrimonio".

Formalmente:

$\forall \text{ hombre}_i \in B \text{ y } \text{ mujer}_j \in A, \text{ con } i=1,2,3 \text{ y } j=1,2,3; \exists M \mid \text{ hombre}_i, \text{ mujer}_j \Leftrightarrow \text{ hombre}_i \text{ y } \text{ mujer}_j \text{ est}{\acute{a}}n \text{ casados.}$

La relaci3n  $M$ , se define como la "*relaci3n de matrimonio*". Del mismo modo se pueden definir las relaciones de amistad, infidelidad, noviazgo, parentesco, entre otros.

Volviendo al concepto, las tres relaciones de preferencia  $\{P, I, R\}$  conforman lo que se denomina *estructura de preferencia*, si cumplen las siguientes propiedades:

- $P$  es asimétrica ( $aPb \Rightarrow b \sim Pa$ , entendiéndose  $\sim P$  como la relaci3n de "no preferencia")
- $I$  es irreflexiva ( $aIa$ )
- $I$  es simétrica ( $aIb \Rightarrow bIa$ )
- $R$  es irreflexiva ( $a \sim Ra$ , entendiéndose  $\sim R$  como la relaci3n de "comparabilidad")
- $R$  es simétrica ( $aRb \Rightarrow bRa$ )
- Solo una de las siguientes propiedades es verdadera:  $aPb, bPa, aIb, aRb$ .

Adem{as existe otra relaci3n, denotada por  $Q$ , denominada "*relaci3n de preferencia d{ebil}*" y definida como sigue:

$$aQb \Leftrightarrow aPb \text{ \textcirc{ } } aIb \text{ (S=P} \cup \text{ I)}$$

De esta definici3n se puede inferir lo siguiente:

$$aPb \Leftrightarrow aQb \text{ y } b \sim Qa$$

$$aIb \Leftrightarrow aQb \text{ y } bQa$$

$$aRb \Leftrightarrow a \sim Qb \text{ y } b \sim Qa$$

Cabe hacer notar que  $Q$  es generalmente conocida como "*relaci3n de preferencia d{ebil}*", en contraste con  $P$ , que se conoce como "*relaci3n de preferencia estricta*".

Hist3ricamente, lo que por tradici3n se ha hecho en cuanto a la modelaci3n de las preferencias, en un proceso de toma de decisiones,

es representar el problema como un proceso de optimización de alguna función  $g$ , definida dentro del conjunto de opciones  $A$ . Este proceso es ampliamente utilizado en el campo de Investigación de Operaciones.

Es decir, para el caso de maximización:

$a \mathbf{P} b \Leftrightarrow g(a) > g(b)$ , estricta preferencia

$a \mathbf{I} b \Leftrightarrow g(a) = g(b)$ , indiferencia

$a \mathbf{S} b \Leftrightarrow g(a) \geq g(b)$ , preferencia débil

Este modelo de preferencias está basado en la idea de que el directivo trata, consciente o inconscientemente, de maximizar una función  $g$ , que engloba los diferentes puntos de vista que, han sido tomados en cuenta en el proceso. Este tipo de razonamiento es utilizado en países de habla inglesa y ha sido usado para construir modelos económicos de uso común.

Cuando se compara dos alternativas, existe un rango de variación de sus características dentro del cual las alternativas parecen iguales. Se puede ejemplificar esto con el experimento de la taza de té:

Se presentan dos tazas de té, cada una de ellas endulzada con una cucharada de azúcar. La tarea es decidir cuál de ellas es más dulce. Como las dos tienen exactamente la misma cantidad de azúcar, la respuesta será que las dos tazas tienen el mismo sabor, o en otras palabras, que se es indiferente respecto de las dos tazas de té. Posteriormente se presentan las mismas tazas de té, pero a una de ellas se le han agregado 10 granos de azúcar. Estos diez granos de azúcar hacen tan poca diferencia, que la respuesta en este caso, probablemente será también que las dos tazas de té son iguales respecto de su sabor dulce. Es decir, la sensibilidad en cuanto a la

percepción del azúcar que contiene cada taza, no alcanza a diferenciar entre una cucharada de azúcar y una cucharada de azúcar más diez granos. Al continuar incrementando la cantidad de azúcar añadida a una de las tazas de té, llegará un momento en el que se podrá identificar cual de ellas es la que contiene más azúcar.

Para considerar este fenómeno en un proceso de comparación de alternativas se ha ideado el uso de lo que se llama "*umbral de indiferencia*", que consiste en definir un intervalo o rango, denotado como  $q$ , dentro del cual dos alternativas son aparentemente iguales. Esto se conoce como "*modelo del umbral de indiferencia*" (Saaty, 1971).

$$\text{Formalmente, } a \mathbf{P} b \Leftrightarrow g(a) > g(b) + q$$

$$a \mathbf{I} b \Leftrightarrow |g(a) - g(b)| \leq q$$

Una adecuación de este modelo resulta, cuando se considera un umbral que tenga la capacidad de variar conforme a la magnitud de la escala escogida. En efecto, el "*modelo del umbral de indiferencia variable*" puede ser esquematizado como sigue:

$$a \mathbf{P} b \Leftrightarrow g(a) > g(b) + q(g(b))$$

$$a \mathbf{P} b \Leftrightarrow g(a) \leq g(b) + q(g(b))$$

$$a \mathbf{P} b \Leftrightarrow g(a) \leq g(a) + q(g(a))$$

Siendo una  $q$  una función de  $g(\cdot)$ .

Sea el umbral de tipo fijo o variable, su utilización sugiere la existencia de un nivel preciso debajo del cual predomina la relación de indiferencia y sobre el cual predomina la relación de preferencia. Sin embargo, a menudo hay una zona intermedia entre preferencia e

indiferencia, dentro de la cual el directivo duda al dar su opinión o da opiniones contradictorias, dependiendo de la forma como se le planteen las preguntas sobre un mismo sujeto. Esta observación conduce a la introducción de un modelo de preferencias que utiliza dos umbrales diferentes: el umbral de indiferencia y el umbral de preferencia. El umbral de preferencia se define como aquel nivel sobre el cual el directivo está seguro de su estricta preferencia de una alternativa sobre la otra. Formalmente:

$$aPb \Leftrightarrow g(a) > g(b) + p(g(b))$$

$$aQb \Leftrightarrow g(b) + p(g(b)) \geq g(a) + >g(b) + p(g(b))$$

$$aIb \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} g(b) + q(g(b)) \geq g(a) \\ g(b) + q(g(b)) \geq g(a) \end{array} \right.$$

La relación  $Q$ , denominada *relación de preferencia débil*, expresa (modela) la duda del directivo en el momento de emitir su opinión acerca de su preferencia o su indiferencia.

Adicionalmente a los conceptos transmitidos hasta aquí, es útil hacer notar que en el momento de emitir un juicio de preferencias, el directivo puede o no, ser capaz de hacerlo (por ejemplo por falta de información) o simplemente no desear hacerlo (por razones contextuales). Esta situación ha sido modelada utilizando la relación  $R$ , denominada *relación de incomparabilidad*. La relación de incomparabilidad aparece frecuentemente, cuando la problemática involucra varios directivos con opiniones contradictorias. Los trabajos

de investigación al respecto, han sido escasos y aún queda mucho por hacer en este sentido.

## **Algunos modelos de preferencias**

A continuación se presenta el resumen del marco conceptual de algunos de los modelos de preferencias más conocidos. Lo presentado a continuación no pretende ser el desarrollo exhaustivo y detallado de dichos modelos de preferencia, sino más bien, dar a conocer cómo han sido conceptualizados los procesos de toma de decisiones y cómo estos conceptos han sido traducidos al lenguaje matemático y convertidos en modelos sistemáticos.

## **Fundamentos del Proceso Analítico Jerárquico**

El Proceso Analítico Jerárquico (AHP en sus siglas por Analytic Hierarchy Process) es un método matemático creado para evaluar opciones cuando se tienen en consideración varios criterios. En ocasiones, la naturaleza del problema obliga a considerar criterios de naturaleza "intangibles"; es decir, aquellos criterios cuya cuantificación es, cuando menos, difícil. Ejemplo de ello son conceptos como el confort, el bienestar, la salud, la vulnerabilidad, la percepción que un cliente tenga sobre la imagen medioambiental de una empresa, la capacidad de gestión de una alcaldía, la corrupción, la dedicación de un estudiante o un funcionario público, el sabor de una bebida y tantos otros, cuya consideración sería de gran utilidad, de ser tomados en cuenta en el proceso de toma de decisiones. El Proceso Analítico

Jerárquico propone una metodología especialmente útil para este efecto, pues está basado en el principio de que la experiencia y el conocimiento de los actores son tan importantes como los datos mismos utilizados en el proceso (Forman, 1990).

El Proceso Analítico Jerárquico (Saaty, 1971) es una técnica de decisión multicriterio, que basada en escalas de razón, permite la resolución de problemas complejos, caracterizados por la existencia de múltiples escenarios, actores y criterios (tangibles e intangibles).

La aplicación del modelo se lleva a cabo generalmente en dos etapas:

- El diseño de la jerarquía
- El proceso de evaluación; este último de naturaleza matemática.

La fase de diseño de la jerarquía consiste en un proceso interactivo en donde se identifican todos los elementos que intervienen en el proceso de la toma de decisiones, para luego ordenarlos en niveles que esquematicen y describan la problemática, como se ilustra a continuación.

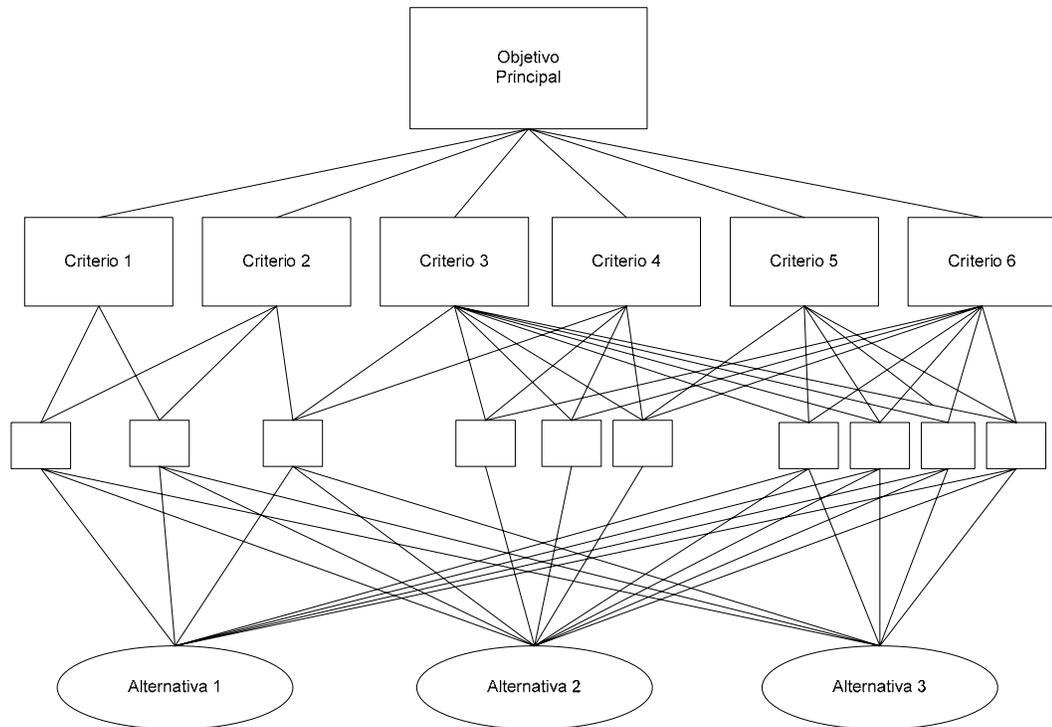


Figura 1. Modelo conceptual AHP

Este proceso consiste básicamente en:

- Conceptualización general: ¿Qué? ¿Cuándo? ¿Dónde? ¿Quién? ¿Cómo? ¿Por qué?
- Definición de criterios, puntos de vista o factores críticos de éxito.
- Identificación de los involucrados, así como del actor principal o directivo.
- Identificación de las alternativas.

El primer paso consiste en identificar todos los elementos que intervienen en el proceso de toma de decisiones e identificar también los niveles en que estos elementos pueden ser agrupados en forma jerárquica. Este esquema, en forma de árbol, resume las

interrelaciones entre los componentes del problema que se quiere resolver. Hay completa libertad para construir la jerarquía. Es muy posible que dos personas conceptualicen el problema de formas diferentes y por ende, que construyan dos jerarquías diferentes. Sin embargo, lo deseable es que la jerarquía sea construida en consenso, tomando en consideración las opiniones de todos los involucrados. Como se ve en la ilustración anterior, en la parte superior del árbol debe figurar siempre el objetivo principal. En los niveles inferiores podrán figurar el conjunto de criterios, el conjunto de los diferentes grupos de involucrados o los sub-criterios relacionados con algún criterio específico. Finalmente, en el nivel de base deberán figurar las diferentes alternativas. No existe restricción respecto de la cantidad de niveles ni del número de elementos en cada nivel. La fase de diseño de la jerarquía obliga a encarar un profundo análisis de los factores de influencia en el problema. Normalmente, la sola finalización de esta fase brinda claridad y entendimiento sobre los componentes del problema que se está analizando y seguramente, es común que el proceso de decisión finalice aquí.

Las representaciones jerárquicas tienen importantes ventajas cuando se trata de analizar problemas y encarar procesos de decisión (Saaty, 1980):

1. La representación jerárquica de un sistema puede ser usada para describir cómo los cambios en prioridades a niveles superiores, pueden afectar a los elementos de niveles inferiores.
2. Las representaciones jerárquicas dan importante información detallada acerca de la estructura y funcionamiento de un sistema

y además, permiten una vista panorámica de los actores y sus respectivos objetivos y propósitos.

3. Las representaciones jerárquicas permiten la flexibilidad necesaria para encarar procesos interactivos, sin que la adición o sustracción de algún elemento afecte fundamentalmente la estructura completa.

Una vez que ha sido finalizada la fase de diseño de la jerarquía, se procede a una segunda fase de naturaleza matemática, que corresponde a la evaluación de la importancia de las alternativas respecto de todos los elementos, que intervienen en el problema y que están representados en los niveles superiores del árbol. Para ilustrar esta fase, que se ha denominado "Elección y aplicación del modelo matemático" y que es de naturaleza matemática, tomaremos como ejemplo la siguiente jerarquía, útil por su simplicidad:

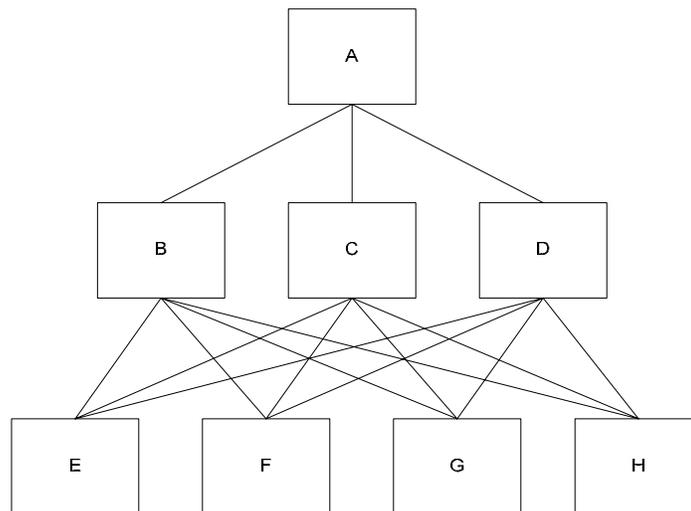


Figura 2. Jerarquización AHP

Como se puede observar, A representa el objetivo principal pues está situado en la cima del árbol. En general, B, C y D son elementos que ejercen influencia directa sobre el elemento A. Los elementos B, C y D podrían ser, por ejemplo, los criterios de selección o los grupos involucrados. Los elementos E, F, G y H ejercen influencia directa sobre B, C y D. Los elementos E, F, G y H, por estar situados en la base de la jerarquía, representan las diferentes alternativas. En este caso la jerarquía está compuesta por tres niveles, pero en problemas reales, la cantidad de niveles dependerá de la complejidad del problema.

Una de las características importantes del Proceso Analítico Jerárquico (AHP) es que utiliza comparaciones biunívocas; es decir, comparaciones entre pares de elementos (también llamadas comparaciones uno a uno). Con base en estas comparaciones biunívocas y mediante el uso de la teoría de matrices, el modelo es capaz de establecer prioridades entre los elementos de un nivel, con respecto de un elemento del nivel inmediato superior. Cuando las prioridades de los elementos de cada nivel han sido determinadas, se utiliza un procedimiento de agregación para obtener las prioridades de las alternativas con respecto del objetivo principal. En otras palabras, con base en la determinación de las prioridades de los elementos en los diferentes niveles de la jerarquía, el modelo permite determinar el grado de preferencia global de las alternativas.

Para ilustrar el procedimiento de comparaciones biunívocas, comenzaremos por comparar los elementos del segundo nivel (B, C y D) con respecto del objetivo principal A. El facilitador tendrá que formular preguntas como las siguientes:

- Con respecto de A, ¿cuál es más importante, B o C?
- Si la respuesta es B: ¿Cuánto más importante es B que C?

La forma más fácil de responder la segunda respuesta, es sin duda, usando frases del lenguaje común, que describan preferencias subjetivas. Probablemente es más cómodo responder algo como “*B me gusta un poco más que C*” o “*me parecen casi iguales, pero B es un poco mejor*” o “*B es mucho mejor que C*”. Para este efecto, el modelo provee una tabla, con la cual deben establecerse estas comparaciones subjetivas biunívocas:

<b>Escala numérica</b>	<b>Escala Verbal</b>	<b>Interpretación</b>
1	<b>Igual</b> importancia de ambos elementos	Los dos elementos contribuyen de igual forma al objetivo.
3	<b>Moderada</b> importancia de un elemento sobre el otro	La experiencia y el juicio favorecen levemente a un elemento sobre el otro
5	<b>Fuerte</b> importancia de un elemento sobre el otro	Uno de los elementos es fuertemente favorecido
7	<b>Muy fuerte</b> importancia de un elemento sobre el otro	Uno de los elementos es fuertemente dominante
9	<b>Extrema</b> importancia de un elemento sobre el otro	La evidencia que favorece a uno de los elementos es del mayor orden de afirmación
2, 4, 6, 8	Valores intermedios	Usados para juicios intermedios

Tabla 1: Escalas de comparaciones AHP

Estudios psicométricos han demostrado que la habilidad del ser humano para establecer distinciones cualitativas entre pares de objetos, puede ser representada adecuadamente mediante cinco atributos: *igual*, *débil*, *fuerte*, *muy fuerte* y *absoluto*. Existe un límite psicológico de  $7 \pm 2$  ítems cuando se trata de establecer comparaciones simultáneas, lo que sugiere que podemos tener hasta 9

puntos de referencia diferentes, para describir nuestras preferencias cualitativas.

Cada una de las expresiones semánticas de la escala verbal, tiene asociado un número que representa el valor de esa expresión semántica. Por ejemplo, “fuerte importancia” vale 5.

Volviendo al ejemplo, después de haber efectuado todas las comparaciones de los elementos del segundo nivel (B, C, D) respecto del elemento A, se tiene la siguiente *matriz de comparaciones biunívocas*:

<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>
<b>B</b>	Igual	Moderada	Fuerte
<b>C</b>		Igual	Moderada
<b>D</b>			Igual

Tabla 2. Matriz de comparaciones biunívocas

Esta matriz expresa que, con respecto del objetivo A, B es “moderadamente mejor” que C, B es “fuertemente mejor” que D y C sea “moderadamente mejor” que D.

Reemplazando las expresiones semánticas por sus respectivos valores, tenemos la siguiente matriz:

<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>
<b>B</b>	1	3	5
<b>C</b>	1/3	1	3
<b>D</b>	1/5	1/3	1

Tabla 3. Matriz de comparaciones biunívocas valorizada

Esta matriz nos indica, que con base en las percepciones subjetivas emitidas por el directivo,  $B=3C$  y  $C=3D$ . Reemplazando valores, deberíamos tener que  $B = 3(3D) = 9D$ ; pero lo que tenemos realmente en la matriz, es  $B=5D$ . Esto se conoce como *matriz inconsistente* y es un fenómeno, cuyo efecto se calcula haciendo uso de los conceptos de *vector característico* y *valor característico* de la teoría de matrices, como se explica a continuación:

Un *vector característico*  $w$  de una matriz  $M$  es un vector tal que  $Mw = \lambda w$ . Los valores del parámetro  $\lambda$  correspondientes al vector  $w$  son denominados *valores característicos* de  $M$ . En otras palabras,  $w$  es un vector característico de  $M$  si es una solución no trivial de  $(M-\lambda I)w=0$ , siendo  $I$  la matriz identidad. Los componentes de  $w$  constituyen un conjunto de soluciones de un sistema lineal con la matriz  $(M-\lambda I)$ . Este sistema posee la solución trivial  $w=(w_1, \dots, w_n)=(0, \dots, 0)$ . Para evitar la presencia de la solución trivial en el conjunto de soluciones del sistema, la matriz  $(M-\lambda I)$  debe ser una matriz singular, i.e. su determinante  $|M-\lambda I|$  debe ser igual a cero. Este determinante es en realidad una función polinomial de grado  $n$  en  $\lambda$ , de la forma  $\lambda^n - m_1\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n(|M|)$ . Esta función se denomina *función polinomial característica* de  $M$ . La condición  $|M-\lambda I|=0$  conduce a una ecuación de grado  $n$ , llamada *ecuación característica* de  $M$ , la cual es igual a cero si  $\lambda$  es reemplazada por  $M$ , produciendo entonces una ecuación matricial. Las raíces  $\lambda_i$  correspondientes a la ecuación característica  $|M-\lambda I|=0$ , con  $i=1, \dots, n$ , son los denominados *valores característicos*. Como es bien conocido, el Teorema Fundamental del Algebra, asegura la existencia de  $n$  raíces para una ecuación polinomial de grado  $n$ . Los vectores

característicos se obtienen de la resolución de los sistemas de ecuaciones correspondientes  $Mw_i = \lambda_i w_i$  (Saaty, 1971).

Se considera a los elementos  $C_1, \dots, C_n$  de algún nivel en la jerarquía. Denotados  $m_{ij}$  como el elemento que representa la importancia de  $C_i$  respecto a  $C_j$  y  $M$  es la matriz conformada por dichos elementos. Esta matriz es recíproca, i.e.  $m_{ij} = 1/m_{ji}$ :

<b>M</b>	<b>C<sub>1</sub></b>	...	<b>C<sub>i</sub></b>	...	<b>C<sub>n</sub></b>
<b>C<sub>1</sub></b>	$M_{11}$	...	$M_{1i}$	...	$M_{1n}$
...	...	...	...	...	...
<b>C<sub>j</sub></b>	$1/m_{1j}$	...	$m_{ij}$		$m_{jn}$
...	...	...	...	...	...
<b>C<sub>n</sub></b>	$1/m_{1n}$	...	$1/m_{jn}$	...	$m_{nn}$

Tabla 4. Matriz de reciprocidad

Si la matriz  $M$  es perfectamente consistente, entonces  $m_{jk} = m_{ij} \cdot m_{jk} \forall i, j, k$ . Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son los valores característicos de  $M$  y si  $m_{ii} = 1 \forall i$ , entonces  $(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) = \lambda_{\max}$ , siendo  $\lambda_{\max}$  el mayor valor característico de  $M$ . Está demostrado en la teoría de matrices, que si los valores  $m_{ij}$  de una matriz recíproca  $M$  son modificados en pequeñas cantidades, los valores característicos resultantes también cambian en pequeñas cantidades. Entonces, si  $M$  es consistente, pequeñas variaciones en los valores de  $m_{ij}$  mantienen a  $\lambda_{\max}$  cercano a  $(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$ . Por lo tanto, la diferencia  $(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) - \lambda_{\max}$  es una medida del grado de consistencia de la matriz  $M$ . Si la denotamos  $(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) = n$ , el índice de consistencia I.C. =  $(\lambda_{\max} - n)/(n-1)$  mide el grado de consistencia de la matriz  $M$ . Para determinar cuán consistente es la matriz  $M$ , debemos comparar su I.C. con el I.C. de una matriz recíproca, del mismo orden, cuyos elementos han sido determinados en forma aleatoria. Este índice de consistencia de la matriz aleatoria es llamado *índice aleatorio* (I.A.) y

sus valores están previamente determinados, de acuerdo con el orden de cada matriz:

Orden de la matriz	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
I.A.	0.00	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51	1.48	1.56	1.57	1.59

Tabla 5. Matriz de índices aleatorios

El principal propósito que se persigue con la aplicación de este modelo es encontrar las ponderaciones de importancia de los elementos de los respectivos niveles de la jerarquía,  $W_{1/x}, \dots, W_{n/x}$  con respecto de algún elemento "X", del nivel inmediato superior. Como se ha descrito antes, la principal herramienta es una matriz numérica, que representa los resultados de preferencias de las comparaciones biunívocas. Con base en un razonamiento teórico que se omite en este ensayo, se escoge *el vector característico*, correspondiente al *valor característico mayor* como el vector que representa las ponderaciones de importancia de los elementos  $C_1, \dots, C_n$ . En otras palabras, las ponderaciones de importancia, son calculadas mediante el vector característico de la matriz de comparaciones biunívocas.

Continuando con el ejemplo, las matrices resultantes de las comparaciones biunívocas y sus respectivos vectores característicos son como sigue:

<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>Ponderaciones</b>
<b>B</b>	1	$m_{bc/a}$	$m_{bd/a}$	$W_{B/A}$
<b>C</b>	$m_{cb/a}$	1	$m_{cd/a}$	$W_{C/A}$
<b>D</b>	$m_{db/a}$	$m_{dc/a}$	1	$W_{D/A}$

<b>B</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b>	<b>H</b>	<b>Ponderaciones</b>
<b>E</b>	1	$m_{ef/b}$	$m_{eg/b}$	$m_{eh/b}$	$W_{E/B}$
<b>F</b>	$m_{fe/b}$	1	$m_{fg/b}$	$m_{fh/b}$	$W_{F/B}$
<b>G</b>	$m_{ge/b}$	$m_{gf/b}$	1	$m_{gh/b}$	$W_{G/B}$
<b>H</b>	$m_{he/b}$	$m_{hf/b}$	$m_{hg/b}$	1	$W_{H/B}$

<b>C</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b>	<b>H</b>	<b>Ponderaciones</b>
<b>E</b>	1	$m_{ef/c}$	$m_{eg/c}$	$m_{eh/c}$	$W_{E/C}$
<b>F</b>	$m_{fe/c}$	1	$m_{fg/c}$	$m_{fh/c}$	$W_{F/C}$
<b>G</b>	$m_{ge/c}$	$m_{gf/c}$	1	$m_{gh/c}$	$W_{G/C}$
<b>H</b>	$m_{he/c}$	$m_{hf/c}$	$m_{hg/c}$	1	$W_{H/C}$

<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b>	<b>H</b>	<b>Ponderaciones</b>
<b>E</b>	1	$m_{ef/d}$	$m_{eg/d}$	$m_{eh/d}$	$W_{E/D}$
<b>F</b>	$m_{fe/d}$	1	$m_{fg/d}$	$m_{fh/d}$	$W_{F/D}$
<b>G</b>	$m_{ge/d}$	$m_{gf/d}$	1	$m_{gh/d}$	$W_{G/D}$
<b>H</b>	$m_{he/d}$	$m_{hf/d}$	$m_{hg/d}$	1	$W_{H/D}$

Tabla 6. Matrices de comparaciones biunívocas y vectores característicos

Finalmente, para calcular las preferencias relativas globales de las alternativas E, F, G y H, se sigue el siguiente procedimiento de agregación:

Ponderación global de la alternativa E:  $W_{B/A} * W_{E/B} + W_{C/A} * W_{E/C} + W_{D/A} * W_{E/D}$

Ponderación global de la alternativa F:  $W_{B/A} * W_{F/B} + W_{C/A} * W_{F/C} + W_{D/A} * W_{F/D}$

Ponderación global de la alternativa G:  $W_{B/A} * W_{G/B} + W_{C/A} * W_{G/C} + W_{D/A} * W_{G/D}$

Ponderación global de la alternativa H:  $W_{B/A} * W_{H/B} + W_{C/A} * W_{H/C} + W_{D/A} * W_{H/D}$

## Fundamentos del Método Electra III

Consideremos la situación en la cual se quiere comparar dos alternativas  $a$  y  $b$  ( $a, b \in A$ ) sobre la base de sus respectivos conjuntos indicadores de desempeño  $G_a$  y  $G_b$ . Las preferencias del Directivo  $D$ , en relación con  $a$  y  $b$ , podrían no estar claramente definidas; situación que se presenta comúnmente en los procesos de decisión, debido a la existencia de incertidumbre en los datos y en el proceso mismo. El método Electra fue creado para permitir que sea considerada la dificultad, que podría tener el directivo  $D$  para emitir un juicio claro y sin ambigüedades sobre su preferencia entre  $a$  y  $b$ . Este modelo de preferencias, no pretende ser una descripción exacta de las preferencias claramente establecidas en la mente de un directivo determinado. En estas condiciones, el método general de preferencias debería permitirnos tomar en cuenta la falta de una idea clara (titubeo) sobre las preferencias entre dos de los tres casos siguientes (Vinke 1992).

$aIb$ :  $a$  es equivalente a  $b$  (indiferencia entre  $a$  y  $b$ )

$aPb$ :  $a$  es preferido a  $b$

$bPa$ :  $b$  es preferido a  $a$

Si  $D$  es un directivo colectivo, inaccesible o vagamente determinado, este modelo es sólo un sistema de preferencias, con el cual es posible operar con el objetivo de visualizar y concatenar los elementos de respuesta a ciertas preguntas, emitidas con el propósito de conocer mejor la situación y tener una idea más clara de las preferencias inherentes al caso.

Existen dos situaciones en donde el directivo D puede tener dificultades para expresar su preferencia entre  $a$  y  $b$ :

El caso de *preferencia débil*, conocido como "relación Q":  $aQb$ , si el titubeo se presenta entre  $aIb$  y  $aPb$ .

El caso de *incomparabilidad*, conocido como "relación R":  $aRb$ , si el titubeo se presenta entre  $bPa$  y  $aPb$ .

La contribución del método Electra consiste en la introducción de una nueva relación, conocida como la *relación de la categoría superior* (o *super-categoría*), denotada por la letra S.

Aquí vale la pena hacer un pequeño paréntesis. La palabra "*super-categoría*" y sus derivadas utilizadas con bastante frecuencia en este texto, provienen de una traducción de la palabra "*outrank*", cuyo significado es "ser de mayor jerarquía que". Al parecer no existe una palabra en español que exprese este concepto y por este motivo, se utiliza el término "*super-categoría*", que si bien es algo extraño, expresa muy bien lo que se quiere decir.

Cada criterio  $g_i$  puede tener asociada una relación de super-categoría  $S_j$  exclusiva para ese criterio. Por definición, la relación  $aS_jb$  es verdadera, cuando los valores de desempeño  $G_a$  y  $G_b$  presentan suficientes argumentos como para considerar, que en la mente del directivo D, el siguiente enunciado es cierto:

" $a$ , con respecto del criterio  $g_j$  solamente, es AL MENOS tan bueno como  $b$ "

La expresión “*al menos tan bueno como*” es equivalente a la expresión “*no peor que*”. La diferencia con expresiones como “*es mejor que*” o “*es peor que*”, consiste en que estas últimas expresan una opinión emitida con toda seguridad, sin dudas ni titubeos.

Tomando en cuenta la familia completa de criterios  $G$ , es posible definir una relación general de super-categoría  $S$ , la cual se define como sigue:

$aSb$  es una relación binaria que es verdadera, si los valores de desempeño en  $G_a$  y  $G_b$  dan razones o argumentos suficientemente poderosos, como para considerar como verdadero el siguiente enunciado en la mente del directivo  $D$ :

“ $a$ , con respecto de todos los criterios, es AL MENOS tan bueno como  $b$ ”

La relación de super-categoría es entonces una relación binaria  $S$  definida en  $A$ , tal que:  $aSb$ , si dado lo que es conocido sobre las preferencias del directivo  $D$  y dada la calidad de las evaluaciones y la naturaleza del problema, se cuenta con suficientes argumentos, como para decidir que  $a$  es al menos tan bueno como  $b$ , no habiendo en cambio ninguna razón esencial para refutar dicho enunciado.

Formalmente:  $aSb \forall g \in G \Rightarrow aSb$

La relación de *super-categoría valorada*, que nos presenta el método Electra se caracteriza por la definición de un *grado de super-categoría*, denotado por  $S(a,b)$ , asociado a cada par ordenado de acciones  $(a,b)$ .

$S(a,b)$  representa la mayor o menor credibilidad, en cuanto a la super-categorización de  $a$  sobre  $b$ .

La naturaleza de las condiciones que deben ser satisfechas para validar el enunciado  $aSb$ , puede ser influenciada por diversos tipos de factores. Algunos de ellos pueden ser por ejemplo, el grado de significación de los criterios tomados en cuenta en  $G$ , la intensidad de las preferencias, la concordancia o discordancia de  $aSb$  respecto del conjunto de criterios, la naturaleza de la información inter-criterios, así como la fortaleza de los argumentos requeridos para dar como válida una relación  $S$ . Estos conceptos son modelados matemáticamente utilizando los conceptos que se explican a continuación.

Habiéndose asociado una *ponderación*  $p_j$  a cada criterio  $g_i$ , el siguiente *índice de concordancia* es calculado para cada par ordenado de alternativas  $(a,b)$ .

$$c(a,b) = (1/P)\sum_{j=1}^n p_j c_j(a,b)$$

donde:  $P = \sum_{j=1}^n p_j$

$$c_j(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{si } g_j(a) + q_j(g_j(a)) \geq g_j(b) \\ 0 & \text{si } g_j(a) + p_j(g_j(a)) \leq g_j(b) \end{cases}$$

Lineal entre los dos

$q_i$  y  $p_j$  denotan los *umbrales de indiferencia y preferencia* respectivamente.

Por definición, el índice de concordancia  $c(a,b)$  caracteriza el “énfasis” con que los argumentos favorables son capaces de validar el enunciado  $aSb$ .

La definición de *discordancia* requiere de la introducción de un *umbral de veto*  $v_j(g_j(a))$  (función de  $g_j(a)$ ) para cada criterio  $g_j$ , tal que la credibilidad de que  $a$  sea de categoría superior a  $b$ , es rechazada si:

$$g_j(a) \geq g_j(b) + v_j(g_j(b)),$$

Inclusive si es que todos los criterios restantes están en favor de que  $a$ , sea de categoría superior a  $b$ .

Un *índice de discordancia*  $D_j(a,b)$ , para cada criterio es definido como sigue:

$$D_j(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_j(b) \leq g_j(a) + p_j(g_j(a)) \\ 1 & \text{si } g_j(b) \geq g_j(a) + v_j(g_j(a)) \end{cases}$$

Lineal entre los dos

Finalmente, el *grado de super-categorización* está definido por:

$$S(a,b) = \begin{cases} c(a,b) & \text{si } D_j(a,b) \leq c(a,b), \forall g_j \\ c(a,b) * \prod_{j \in J(a,b)} (1 - D_j(a,b) / (1 - c(a,b))) & \end{cases}$$

donde  $J(a,b)$  es el conjunto de criterios que cumplen  $D_j(a,b) > (a,b)$

El grado de super-categorización es entonces igual al índice de concordancia, cuando ningún criterio es discordante. En el caso opuesto, el índice de concordancia es disminuido en función de la importancia de las discordancias.

## Fundamentos del Método Promethee

El método Promethee ha sido diseñado para tratar con problemas de múltiples criterios,  $G = \{g_1 \dots, g_j \dots, g_k\}$  en los que existe un conjunto finito de alternativas  $A = \{a_1 \dots, a_j \dots, a_n\}$  (Brans, 1997).

En este caso, el directivo encara una tabla o matriz de evaluación del siguiente tipo:

	$g_1$	$g_2$	...	$g_j$	...	$g_k$
$a_1$	$g_1(a_1)$	$g_1(a_2)$	...	$g_j(a_1)$	...	$g_k(a_1)$
$a_2$	$g_1(a_2)$	$g_2(a_2)$	...	$g_j(a_2)$	...	$g_k(a_2)$
...	...	...	...	...	...	...
$a_j$	$g_1(a_j)$	$g_2(a_j)$	...	$g_j(a_j)$	...	$g_k(a_j)$
...	...	...	...	...	...	...
$a_n$	$g_1(a_n)$	$g_2(a_n)$	...	$g_j(a_n)$	...	$g_k(a_n)$

Tabla 7. Matriz de evaluación – método Promethee

Este método requiere de cierta cantidad de información adicional sobre la relación de importancia entre los criterios. El directivo deberá suministrar la ponderación de importancia relativa de los criterios en relación con el objetivo principal, como se ilustra en la siguiente tabla:

$g_1$	$g_2$	$\dots$	$g_j$	$\dots$	$g_k$
$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_j$	$\dots$	$p_k$

Tabla 8. Matriz de ponderaciones – método Promethee

- El criterio más importante recibe la ponderación más alta.
- $\sum_{j=1..k} p_j = 1$

Además, el método supone que se harán comparaciones biunívocas entre las alternativas respecto de cada criterio. La manera de establecer dichas comparaciones es mediante el uso de una función de las siguientes características:

$$F_j(a,b) = F_j[d_j(a,b)], \quad a, b \in A$$

donde,

$$j \text{ es el índice característico de cada criterio } g_j$$

$$d_j(a,b) = g_j(a) - g_j(b)$$

$$0 \leq F_j(a,b) \leq 1$$

Esta función, denominada *función de preferencias*, ha sido concebida para representar el tipo de relación entre dos alternativas, respecto de un criterio determinado. Por lo tanto, el directivo deberá elegir para cada criterio, una de las 6 diferentes formas de la función, a saber: la forma usual (horizontal recta), forma de U, forma de V, forma de escalera, forma de V, considerando el parámetro de indiferencia y por último, la forma Gaussiana (o en S). Respectivamente, de izquierda a derecha y de arriba abajo:

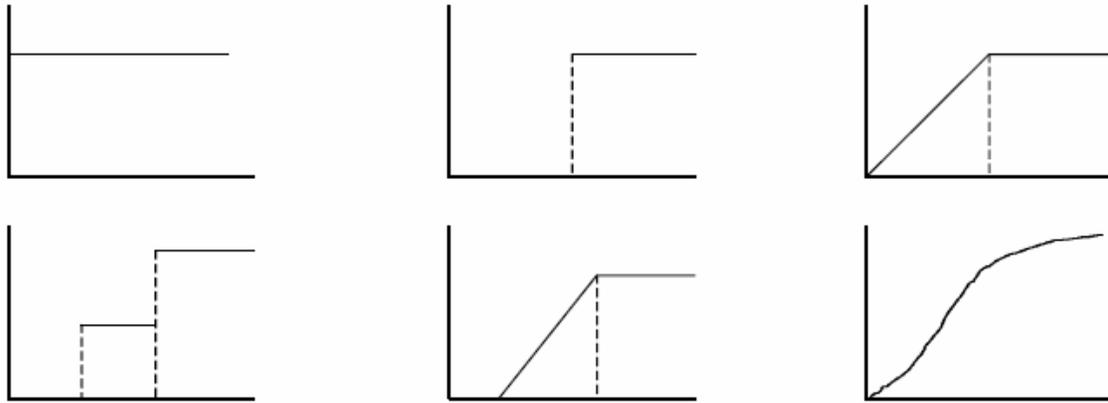


Figura 3. Funciones de preferencias

En cuanto la tabla de evaluación ( $g_j(a_i)$ ), las ponderaciones ( $p_j$ ) y las funciones de preferencias han sido definidas, el proceso Promethee puede comenzar.

Con el propósito de realizar las comparaciones biunívocas, deben ser definidos con antelación, ciertos índices de preferencia y flujos de super-categorización, como se ilustra a continuación:

El *índice de preferencia agregada*, denotado por  $\pi(a,b)$ , expresa cómo y en qué grado  $a$ , es preferido a  $b$ , en relación a todos los criterios en general. Es decir, expresa la preferencia global de una alternativa  $a$  en relación con otra alternativa  $b$ .

$$\pi(a,b) = \sum_{j=1..k} F_j(a,b) p_j, \text{ siendo } \pi(a,b) \text{ un valor entre cero y uno,}$$

$$\text{y } \pi(a,a)=0$$

Un  $\pi(a,b)$  cercano a cero, implica una preferencia global débil de  $a$  sobre  $b$ . Así mismo, un  $\pi(a,b)$  cercano a uno, implica una preferencia global fuerte de  $a$  sobre  $b$ .

Una vez que todos los índices de preferencia agregada han sido obtenidos, se procede a calcular los flujos de super-categorización, como sigue:

El *flujo de super-categorización positivo* expresa cómo una alternativa  $a$ , super-categoriza a las otras. Este índice es concebido por el autor como el "poder" de  $a$ , o su "*carácter de super-categorización*".

$$\varphi^+(a) = (1/(n-1)) \sum_{x \in A} \pi(a,x)$$

siendo mejor la alternativa  $a$ , en la medida en que  $\varphi^+(a)$  es mayor.

El *flujo de super-categorización negativo* expresa cómo una alternativa  $a$  es super-categorizada por las otras. Este índice es concebido por el autor como la "*debilidad*" de  $a$ , o su "*carácter de sub-categorización*".

$$\varphi^-(a) = (1/(n-1)) \sum_{x \in A} \pi(a,x)$$

siendo mejor la alternativa  $a$  en la medida en que  $\varphi^-(a)$  es menor.

A continuación, se utilizan estos índices para calcular la categorización final de las alternativas:

$aPb$	Si	$\varphi^+(a) > \varphi^+(b)$ y $\varphi^-(a) < \varphi^-(b)$ $\varphi^+(a) = \varphi^+(b)$ y $\varphi^-(a) < \varphi^-(b)$ $\varphi^+(a) > \varphi^+(b)$ y $\varphi^-(a) = \varphi^-(b)$
$aIb$	Si	$\varphi^+(a) = \varphi^+(b)$ y $\varphi^-(a) = \varphi^-(b)$
$aRb$	Si no se da ninguno de los casos anteriores	

Tabla 9. "ranking" parcial – cuando se permite la relación R.

En el caso de "ranking" completo (cuando se asume la comparabilidad de todas las alternativas), se define un índice denominado *flujo de super-categorización neto*:

$\varphi(a) = \varphi^+(a) - \varphi^-(a)$ . A mayor flujo neto, mejor la alternativa.

Por lo tanto, el "ranking" completo de las alternativas, se define como:

$aPb$  si  $\varphi(a) > \varphi(b)$

$aIb$  si  $\varphi(a) = \varphi(b)$

## Fundamentos del Método MacBeth

Basado en comparaciones semánticas sobre el atractivo y las diferencias en el grado de atractivo de diversos estímulos, el método MacBeth es un enfoque interactivo, ideado para ayudar a la persona que emite los juicios, a cuantificar el atractivo que presenta cierto estímulo (Bana e Costa, 2000). En términos generales, evaluar información de tipo ordinal sobre las preferencias de un directivo D respecto de un conjunto de alternativas, no presenta mayor dificultad. Lamentablemente, en la mayoría de las aplicaciones prácticas esta información no es suficientemente completa, para asegurar que los

resultados sean significativos, pues a menudo es necesario saber, no solo que  $x$  es más atractivo que  $y$ , sino también cuánto más atractivo es. Muy poca gente posee información cardinal a priori (directamente de su mente al papel). Cuando un directivo D intenta presentar información de tipo cardinal sobre sus preferencias, respecto de un conjunto de estímulos, hay cierto riesgo de que esa información no esté bien fundamentada. Los métodos de preferencias, generalmente poseen técnicas que permiten al directivo D, evaluar interactiva y progresivamente sus propias percepciones subjetivas, respecto de los estímulos presentados. El método MacBeth sirve de guía en la construcción de una escala cardinal, la cual cuantifica el grado de atractivo de los elementos de un conjunto de estímulos  $S$ , según la opinión de un evaluador (el directivo D).

Esto concepto se ilustra mediante el siguiente ejemplo: con base en un estudio socio-económico, se han definido algunos objetivos (factores críticos de éxito), tendientes a promover el desarrollo socio-económico de una región. Para ello, a nivel gubernamental se ha creado un presupuesto, que debe ser invertido con base en alguna política de desarrollo, que logre la utilización óptima de los recursos disponibles. En una etapa subsiguiente se han propuesto diversas *políticas de desarrollo* (alternativas  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ , las cuales deberán ser evaluadas en relación con su utilidad para cumplir con los objetivos establecidos. Dichos objetivos han sido convertidos en criterios, con base en los cuales se efectuará el proceso de evaluación.

Los criterios son:

- diversificación sectorial
- más PYMES
- mayor apertura hacia mercados externos

- más servicios
- mejor integración mediambiental
- mejor distribución territorial
- mejor viabilidad empresarial
- mayor capacidad de empleo

Cada uno de los criterios debe ser estudiado para poder definir una escala, que sirva para describir el nivel de impacto de cada política (i.e. alternativa) con respecto de ese criterio. Esta escala se usa para describir los *niveles de impacto* y por lo tanto, se denomina *descriptor*. Tomando el caso del criterio “*diversificación sectorial*”, cuyo éxito se mide en términos de “*el re-direccionamiento de la actividad económica hacia mercados prometedores*”, se definen seis niveles de impacto, que son ordenados de la siguiente forma:

- A la política de desarrollo ayudará a CASI TODAS las comunidades
- B la política de desarrollo ayudará a la MAYORIA de las comunidades
- C la política de desarrollo ayudará SOLO a las comunidades grandes
- D la política de desarrollo en GENERAL ayudará a las comunidades grandes
- E la política de desarrollo EN PARTE ayudará a las comunidades grandes
- F la política de desarrollo ayudará SOLO a las comunidades pequeñas

El conjunto de “niveles de impacto”, constituye el conjunto de estímulos  $S=\{A,B,C,D,E,F\}$ . Entre los elementos de  $S$ , existe una relación de *estricto orden débil*, denominado  $P$ , que modela el grado de atractivo (“ranking”) de los elementos de  $S$ , según la opinión de un directivo  $D$  respecto a una propiedad determinada de los estímulos. El conjunto de elementos  $S=\{A,B,C,E,D,E,F\}$  forma una escala ordinal, es decir: A es el más atractivo, seguido de B, C, D, E y finalmente F como estímulo menos atractivo con respecto a uno de los criterios (en este ejemplo se considera el criterio de “diversificación sectorial”). Esto se puede expresar en notación matemática de la siguiente forma:

$\forall x,y \in S, xPy$  si y solo si D juzga a  $x$  como de mayor atractivo que  $y$

De entre los niveles de impacto, dos de ellos deben ser elegidos para representar los niveles de referencia "bueno" y "neutral". En este caso, B=bueno y F=neutral. Más adelante, a cada política de desarrollo (alternativa) se le asignará un nivel de impacto referido a cada criterio, definiendo de esta manera un perfil de impactos de cada criterio y de cada política.

El fundamento básico de MacBeth es simplemente formular algunas preguntas concretas, con el objetivo de obtener información confiable sobre las *diferentes de atractivo* entre los diferentes estímulos, haciendo posible ensayar de este modo la consistencia de las respuestas emitidas por el directivo, en relación con el tipo de escala que se quiere construir. Dichas preguntas son lo más simples y naturales que sea posible y están referidas solamente a dos estímulos a la vez (comparaciones biunívocas). Lo que se persigue con el método, es la obtención de una escala de preferencias, a través del análisis de información indirecta obtenida de las respuestas a estas preguntas concretas y simples (Bana e Costa, 2000).

El procedimiento de formulación de las preguntas consiste en pedir a D que juzgue la *diferencia de atractivo* entre dos estímulos ( $x,y \in S$ , siendo  $x$  más atractivo que  $y$ ), escogiendo una de las frases (o expresiones semánticas) siguientes:

- C<sub>0</sub> SIN diferencia de atractivo
- C<sub>1</sub> MUY DÉBIL diferencia de atractivo
- C<sub>2</sub> DÉBIL diferencia de atractivo
- C<sub>3</sub> MODERADA diferencia de atractivo
- C<sub>4</sub> FUERTE diferencia de atractivo
- C<sub>5</sub> MUY FUERTE diferencia de atractivo

C<sub>6</sub> EXTREMA diferencia de atractivo

Las preguntas utilizadas por lo general son parecidas a las que se presentan a continuación:

- ¿Cuál elemento (entre  $x$  y  $y$ ) es el más atractivo respecto de la propiedad P?
- ¿Cómo calificaría (usando  $C_0, \dots, C_6$ ) la diferencia de atractivo entre  $x$  y  $y$ ?

Con la información recabada durante este “*proceso de cuestionamiento*”, se puede construir una matriz que tenga por elementos los juicios categóricos de  $D$ , acerca de las diferencias de atractivo entre pares de elementos de  $S$ , como se ejemplifica a continuación.

	A	B	C	D	E	F
A	Sin	Débil	moderada	moderada	muy fuerte	extrema
B		sin	débil	débil	muy fuerte	extrema
C			sin	muy débil	fuerte	muy fuerte
D				sin	fuerte	muy fuerte
E					sin	moderada
F						sin

Tabla 10. Matriz de juicios categóricos

A pesar de que cada pregunta involucra solo dos estímulos, tomando como base la matriz, es sencillo inferir información indirecta concerniente a la diferencia de atractivo entre pares de estímulos. Por ejemplo, se puede decir que la diferencia de atractivo entre D y E (i.e. *fuerte*) es mayor que la diferencia de atractivo entre B y C (i.e. *débil*). Para el ejemplo de la tabla, el modelo se encargara de restringir que la diferencia entre el número asociado a D y el número asociado a E, sea

mayor que la diferencia entre los números asociados a B y C. En efecto, dadas la relación P y la matriz de juicios categóricos, el modelo presenta los elementos necesarios para verificar la existencia de una escala numérica  $\varphi$  en S, que satisfaga las dos condiciones siguientes (reglas de medición).

Condición 1 (condición ordinal)

$\forall x, y \in S: \varphi(x) > \varphi(y) \Leftrightarrow x$  es más atractivo que  $y$

Condición 2 (condición semántica)

$\forall k, k' \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \forall x, y, w, z \in S$  con  $(x, y) \in C_k$  y  $(w, z) \in C_{k'}: k \geq k' + 1 \Rightarrow \varphi(x) - \varphi(y) > \varphi(w) - \varphi(z)$

Si no es posible satisfacer estas dos condiciones, ninguna escala podrá representar los juicios expresados. Es decir, la matriz de juicios es incompatible con cualquier intento de representar dichos juicios en forma de una escala de intervalos. Si por el contrario, las condiciones 1 y 2 son satisfechas (matriz consistente), el modelo determina a partir de todas las posibles escalas, una escala particular  $\mu$  en S (denominada *escala básica de MacBeth*), mediante un procedimiento que consiste esencialmente, en la resolución del siguiente problema de programación lineal:

Conjunto de estímulos:  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$

Relación P en S, tal que:

$s_1$  es al menos tan atractivo como  $s_2, \dots, s_{n-1}$ , y más atractivo que  $s_n$

$s_2$  es al menos tan atractivo como  $s_3, \dots, s_n$

$s_3$  es al menos tan atractivo como  $s_4, \dots, s_n$

...

$s_{n-1}$  es al menos tan atractivo como  $s_n$

Variables positivas:  $\varphi(s_i), i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Función objetivo:  $\min \varphi(s_1)$

Restricciones:

- (1)  $\varphi(s_n) = 0$
- (2)  $\forall x, y \in S, \text{ con } (x, y) \in C_0: \varphi(x) = \varphi(y)$
- (3)  $\forall k, k' \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ con } k > k',$   
 $\forall (x, y) \in C_k \text{ y } \forall (w, z) \in C_{k'}: \varphi(x) - \varphi(y) \geq \varphi(w) - \varphi(z) + k - k'$

El resultado de este programa lineal es una escala numérica ( $\mu$  en  $S$ ), representando las posiciones de los estímulos, respecto de su grado de atractivo (ej.:  $A=15, B=13, C=11, D=10, E=4, F=0$ ).

El siguiente paso del modelo es transformar la escala  $\mu$ , que es la primera escala que se presenta el modelo MacBeth, como representación de juicios ordinales, en una escala cardinal. Para ello, es necesario pensar en las proporciones respectivas entre las diferencias de atractivo de  $\mu$ . Esto se logra confrontando a  $D$  con proporciones como  $(\mu(x) - \mu(y))/(\mu(w) - \mu(z))$  y preguntarle si estas reflejan correctamente la proporción que  $D$ , piensa que existe entre la diferencia de atractivo entre  $x$  y  $y$ , y la diferencia de atractivo entre  $w$  y  $z$ . Es decir, si  $(\mu(A) - \mu(C))/(\mu(E) - \mu(F))=1$ , habrá que preguntar si  $D$  considera que la diferencia de atractivo entre  $A$  y  $C$ , es la misma que la diferencia de atractivo entre  $E$  y  $F$ . Entonces,  $D$  podrá variar los valores en  $\mu$ , evitando violar las restricciones del programa lineal (lo cual puede ser calculado) hasta sentirse completamente satisfecho acerca de los atractivos relativos de cada par de estímulos (Bana e Costa, 2000).

Una vez que se han logrado las escalas cardinales para cada criterio, se procede a la evaluación del grado de atractivo global de las alternativas. Para esto, se construye una escala  $v_i$  para el descriptor de cada criterio. Este descriptor será denominado  $X_i$ , siendo  $i$  el identificador de cada criterio. Anteriormente dos niveles de impacto

fueron definidos para representar los niveles de referencia "bueno" y "neutral", que en el caso del ejemplo fueron B y F para el criterio "diversificación sectorial". Formalmente, los niveles de referencia del criterio  $i$ , serán denotados  $v_i(\text{neutral})=0$  y  $v_i(\text{bueno}) = 100$ , siendo  $\text{neutral}_i$  y  $\text{bueno}_i$  los niveles de referencia del criterio  $i$ . De esta manera,  $v_i(x_i)$  mide el atractivo "absoluto" (de acuerdo con el criterio  $i$ ). De esta manera  $v_i(x_i)$  mide el atractivo "absoluto" (de acuerdo con el criterio  $i$ ) de cada elemento  $x_i$  de  $X_i$ . Para medir el atractivo "global" (de acuerdo con todos los criterios), el siguiente procedimiento de agregación es utilizado:

$$V(x_1, \dots, x_n) = k_1 v_1(x_1) + \dots + k_n v_n(x_n),$$

siendo  $n$  la cantidad total de criterios,  $k_i \geq 0$  y  $\sum_{i=1}^n k_i = 1$

Los parámetros  $k_i$ , se conocen como *constantes ascendentes* y son determinadas de la siguiente manera:

El directivo  $D$ , debe considerar una alternativa ficticia (e.g. una política de desarrollo) por cada criterio (e.g. diversificación sectorial); de tal manera, que el impacto de esta alternativa sea "bueno" en relación con ese criterio y "neutral" para los demás criterios. Es decir, el directivo  $D$  imaginará  $n$  alternativas ficticias, tal que:

$$\begin{aligned} a_0 &= (\text{neutral}_1, \dots, \text{neutral}_n) \\ a_1 &= (\text{bueno}_1, \text{neutral}_2, \dots, \text{neutral}_n) \\ a_2 &= (\text{neutral}_1, \text{bueno}_2, \dots, \text{neutral}_n) \\ &\dots \\ a_i &= (\text{neutral}_1, \dots, \text{bueno}_i, \dots, \text{neutral}_n) \\ &\dots \\ a_n &= (\text{neutral}_1, \text{neutral}_2, \dots, \text{bueno}_n) \end{aligned}$$

i.e.,  $a_2$  corresponde a la alternativa ficticia, cuyo impacto sea "bueno" para el criterio 2.

En seguida, se procede a realizar un proceso que permite ordenar las constantes ascendentes  $\{k_1, \dots, k_n\}$ . Aplicando el modelo de agregación se tiene que  $V(a_0)=0$  y  $V(a_i)=100k_i$ , para  $i=1, \dots, n$ . Consecuentemente, ordenar las alternativas ficticias en orden decreciente en cuanto a su atractivo global relativo, llevará al ordenamiento de las constantes ascendentes, en relación con su magnitud relativa. Este proceso consiste simplemente en escoger cuál alternativa ficticia es la que sería más atractiva en relación con el objetivo principal. Por consiguiente, la constante  $k_i$ , correspondiente a esta alternativa ficticia es la de mayor valor. En otras palabras, la diferencia de atractivo entre esta alternativa ficticia y la alternativa  $a_0$  es "extrema". Luego se procede a escoger la siguiente alternativa ficticia más importante y se da una expresión semántica descriptiva de la diferencia de atractivo, entre esta segunda alternativa y la alternativa  $a_0$ , por ejemplo, "muy fuerte". Este proceso llevará un "ranking" de las constantes ascendentes, que a manera de ejemplo podría lucir más o menos así (escala ordinal):

$$k_7 > k_2 > k_3 = k_5 > \dots > k_n > k_i > \dots > k_8 > k_1 > k_6$$

Esto hará posible la construcción de la siguiente tabla (nótese la correspondencia de sub-índices)

	$a_7$	...	$a_n$	$a_i$	...	$a_6$
$a_7$	No	...	fuerte	muy fuerte	...	muy fuerte
...	...	...	...	...	...	...
$a_n$			no	moderado	...	muy fuerte
$a_i$				No	...	fuerte
...					...	moderado
$a_6$						no

Tabla 11. Resumen de comparaciones biunívocas de las alternativas ficticias

Esta tabla representa el resumen de las comparaciones biunívocas de las alternativas ficticias  $\{a_0, \dots, a_i, \dots, a_n\}$ . La alternativa  $a_0$ , es "neutral" para todos los criterios y cada alternativa ficticia  $a_i$ , corresponde a cada uno de los criterios  $g_i$ .

Mediante el mismo modelo de programación lineal utilizado para definir la escala  $\mu$ , se logra determinar una escala similar, la cual mediante una transformación lineal, tendrá la propiedad de que la suma de sus valores (correspondientes a cada alternativa ficticia) sea 100, lo cual asegura que  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = 1$ , siendo  $n$ , la cantidad total de criterios.

Posteriormente, los valores de esta escala pueden ser modificados con el fin de que las proporciones de los valores reflejen la percepción de D en cuanto a las diferencias de atractivo de las alternativas ficticias. Este procedimiento es similar a aquel que se comentó al principio en referencia a la escala de MacBeth.

Cuando estas modificaciones han sido hechas, los valores numéricos de las constantes ascendentes pueden ser calculados de la siguiente expresión:

Para cada par de alternativas ficticias:

$$(V(a_i)-V(a_0))/(V(a_j)-V(a_0))=V(a_i)/V(a_0)=(100k_i)/(100k_j)=k_i/k_j$$

con estos datos es posible calcular el atractivo global de cada alternativa, pues se cuenta con todos los parámetros necesarios para efectuar el procedimiento de agregación. El resultado de este procedimiento de agregación, será una escala de preferencias que represente el “ranking” de atractivo global de las alternativas (i.e., considerando todos los criterios).

## **Fundamentos del Método Munda<sup>1</sup>**

NAIADE es un método de toma de decisiones con criterios múltiples que permite tomar en cuenta diferentes tipos y grados de incertidumbre, presentes en el proceso. Este método realiza un “ranking” de alternativas utilizando la técnica de las comparaciones biunívocas y no requiere de la elaboración previa de una ponderación de criterios respecto a su importancia relativa. Los valores utilizados para expresar el desempeño de las alternativas con respecto de los criterios pueden ser números exactos, números estocásticos, números difusos o expresiones lingüísticas. NAIAD E permite la evaluación de las alternativas respecto de un conjunto de criterios mediante el uso de una *matriz de impactos*. Esto se basa en un algoritmo de comparación

---

<sup>1</sup> Esta parte se ha elaborado en base a “NAIADE MANUAL – versión 1.0 English”

que utiliza dicha matriz de impactos y que está compuesto por los siguientes pasos:

1. construcción de la matriz de impactos (criterios vs. Alternativas).
2. comparaciones biunívocas de las alternativas utilizando relaciones de preferencia.
3. agregación de todos los criterios.
4. "ranking" de alternativas.

NAIADE también permite la evaluación de conflictos entre diversos grupos de involucrados mediante una *matriz de equidad*, la cual consiste en evaluaciones lingüísticas de cada alternativa, hechas por cada grupo de involucrados. A partir de la matriz de equidad se calcula otra matriz denominada *matriz de similaridad*, con la cual es posible descubrir la posible formación de coaliciones y los niveles de conflicto entre los diferentes grupos de involucrados (Munda, 1995)

Para construir la matriz de impactos es necesario contar con valores asociados a cada criterio, respecto de cada alternativa. Estos valores pueden ser números puros (e.g.: el costo expresado en moneda), o definiciones cuantitativas afectadas por diferentes niveles de incertidumbre, ya sea escogiendo una *función de densidad probabilística* en el caso en que la incertidumbre pueda ser del tipo estocástico, o escogiendo la forma de la *función de membresía* en el caso de que la incertidumbre deba ser tratada con conceptos de la matemática difusa (Munda, 1995).

Para poder comparar los valores dados a los criterios respecto de las alternativas es necesario introducir el concepto de *distancia semántica*

(Munda, 2001). Distancia semántica se define simplemente como la distancia entre dos funciones, tomando en cuenta la posición y la forma de dichas funciones. Formalmente, distancia semántica es:

Dados dos conjuntos difusos  $\mu_{A1}(x)$  y  $\mu_{A2}(x)$ , definimos:

$$f(x) = k_1 \mu_{A1}(x) \text{ y } g(y) = k_2 \mu_{A2}(y)$$

donde  $f(x)$  y  $g(y)$  son dos funciones obtenidas reescalando las ordenas de  $\mu_{A1}(x)$  y  $\mu_{A2}(x)$  mediante el uso de las constantes  $k_1$  y  $k_2$ , de manera tal que:

$$\int_{-\infty, +\infty} f(x) dx = \int_{-\infty, +\infty} g(y) dy = 1$$

La distancia semántica  $S_d(f(x), g(x))$  entre las dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  se define así:

Si  $f(x): X = [X_L, X_U]$  y  $g(y): Y = [X'_L, X'_U]$ , donde los conjuntos  $X$  y  $Y$  pueden ser conjuntos abiertos,

$$\text{entonces } S_d(f(x), g(x)) = \int_X \int_Y |X - Y| f(x) g(y) dx dy$$

La comparación de los valores de cada par de alternativas con respecto de los criterios es realizada mediante el concepto de *distancia semántica*. La comparación se basa en *relaciones de preferencia*, definidas mediante 6 funciones que permiten expresar un *índice de credibilidad* de las frases descriptivas de las relaciones de preferencia entre dos alternativas. Estas frases son: *mucho mejor*, *mejor*,

*aproximadamente igual, igual, peor y mucho peor.* El índice de credibilidad está comprendido entre 0 y 1, e incrementa monótonicamente dentro de este rango. A continuación, las definiciones matemáticas de las seis relaciones de preferencia:

Mucho mejor:	$\mu_{>>}(d)=$	0, para $d < 0$ $1/(1+((C^{>>}(\sqrt{2}-1))/d^2)^2)$ , para $d \geq 0$
Mejor:	$\mu_{>}(d)=$	0, para $d < 0$ $1/(1+(C^{>}/d^2))$ , para $d \geq 0$
Aproximadamente igual	$\mu_a(d)=$	$e^{-((\log 2/C_a) d )}$ , $\forall d$
Igual:	$\mu_{=}(d)=$	$e^{-((\log 2/C_n * C_n)(d*d))}$ , $\forall d$
Mucho peor:	$\mu_{<<}(d)=$	0, para $d < 0$ $1/(1+((C^{<<}(\sqrt{2}-1))/d^2)^2)$ , para $d \geq 0$
Peor:	$\mu_{<}(d)=$	0, para $d < 0$ $1/(1+(C^{<}/d^2))$ , para $d \geq 0$

Tabla 12. Matriz de relaciones de preferencia.

,donde  $C^{>>}$ ,  $C^{>}$ ,  $C_{=}$ ,  $C_a$ ,  $C^{<<}$  y  $C^{<}$  son los valores en abscisa en los que las funciones igualan 0.5 y  $d$ , es la distancia.

Las relaciones de preferencia tienen las siguientes restricciones:

1.  $\mu_{>>}(d)=\mu_{<<}(-d)$  y  $\mu_{>}(d)=\mu_{<}(-d)$ , i.e.: dadas dos alternativas A y B a una distancia  $d$ , el índice de credibilidad de la frase "A es

*mejor que B*", es igual al índice de credibilidad de la frase "A es peor que B"

2.  $C = \langle C_a \langle C \rangle \langle C \rangle \rangle$ . El índice de credibilidad de la frase "A es igual que B" es menor que el índice de credibilidad de la frase "A es aproximadamente igual a B". El índice de credibilidad de la frase "A es mucho mejor que B" es menor que el índice de credibilidad de la frase "A es mejor que B".

Independientemente del tipo de información (numérica, estocástica o difusa), es necesario asignar el valor numérico de la distancia donde el índice de credibilidad es 0.5.

A través de un algoritmo de agregación de los índices de credibilidad, NAIADDE calcula un *índice de intensidad de preferencia* de una alternativa respecto de otra alternativa. En particular, el parámetro  $\alpha$  es usado para expresar el requerimiento mínimo de los índices de credibilidad. Solamente aquellos criterios cuyos índices sean superiores al umbral  $\alpha$ , serán tomados en cuenta positivamente en el procedimiento de agregación.

El índice de intensidad de preferencia  $\mu^*(a, b)$  (donde \* significa  $\gg$ ,  $>$ ,  $\cong$ ,  $=$ ,  $\ll$ ,  $<$ ) de una alternativa  $a$  versus otra alternativa  $b$ , se define como sigue:

$$\mu^*(a, b) = (\sum_{m=1, \dots, M} \max(\mu^*(a, b)_m - \alpha, 0)) / (\sum_{m=1, \dots, M} |\mu^*(a, b)_m - \alpha|)$$

El índice de intensidad  $\mu^*(a, b)$  tiene las siguientes características:

$$0 \leq \mu^*(a, b) \leq 1$$

$$\mu^*(a, b) = 0 \text{ si ningun } \mu^*(a, b)_m \text{ es mayor que } \alpha$$

$$\mu^*(a, b) = 1 \text{ si } \mu^*(a, b)_m \geq \alpha \forall m \text{ y } \mu^*(a, b)_m > \alpha \text{ para al menos un criterio}$$

Con el objetivo de utilizar la información respecto de la diversidad en la evaluación de las relaciones difusas, respecto de cada criterio, el concepto de *entropía* resulta muy útil. La entropía se calcula como un índice que varía entre 0 y 1 y que indica la variación de los índices de credibilidad que están sobre el umbral y cercanos al valor 0.5 (el cual corresponde a la máxima difusividad). Un valor entrópico de 1 significa que todos los criterios dan una indicación de máxima difusividad (0.5).

La información provista por el índice de intensidad de preferencia  $\mu^*(a, b)$  y la correspondiente entropía  $H^*(a, b)$  puede ser utilizada para construir los grados de veracidad ( $\tau$ ) de los siguientes enunciados:

“de acuerdo con la mayoría de los criterios,

*a* es mejor que *b*”

*a* y *b* son indiferentes”

*a* es peor que *b*”

los enunciados “*a* es mejor que *b*”, “*a* y *b* son indiferentes” y “*a* es peor que *b*” son calculados como sigue:

$$\omega_{\text{mejor}}(a, b) = (\mu_{>>}(a, b) \wedge C_{>>}(a, b) + \mu_{>}(a, b) \wedge C_{>}(a, b)) / (C_{>>}(a, b) + C_{>}(a, b))$$

$$\omega_{\text{indiferente}}(a, b) = (\mu_{=} (a, b) \wedge C_{=} (a, b) + \mu_{\equiv} (a, b) \wedge C_{\equiv} (a, b)) / (C_{=} (a, b) + C_{\equiv} (a, b))$$

$$\omega_{\text{peor}}(a, b) = (\mu_{<<} (a, b) \wedge C_{<<} (a, b) + \mu_{<} (a, b) \wedge C_{<} (a, b)) / (C_{<<} (a, b) + C_{<} (a, b))$$

,donde  $C^*(a, b) = 1 - H^*(a, b)$  es el nivel de entropía asociado sobre el índice de intensidad de preferencia, y el operador  $\wedge$ , puede ser reemplazado por el operador “mínimo” (lo cual no da compensación) y por el operador Zimmermann-Zysno, el cual permite utilizar grados de compensación variables (Munda, 1995).

Finalmente, el operador “de acuerdo con la mayoría de los criterios” es implementado filtrando los valores  $\omega_{\text{mejor}}$ ,  $\omega_{\text{indiferente}}$  y  $\omega_{\text{peor}}$  de la siguiente manera:

$$\tau(\omega) = \begin{cases} 1 & \forall \omega \geq 0.8 \\ 3.33 \omega - 1.66 & \forall 0.5 \leq \omega \leq 0.8 \\ 0 & \forall \omega \leq 0.5 \end{cases}$$

NAIADE permite el “ranking” de las alternativas con base en los índices de intensidad de preferencias  $\mu^*(a, b)$  y sus correspondientes entropías  $H^*(a, b)$ . El “ranking” final proviene de la intersección de dos “ranking” diferentes. El primero,  $\Phi^+(a)$  está basado en las relaciones de preferencia “mejor” y “mucho mejor” y mediante un valor entre 0 y 1 indica cuán mejor es  $a$  respecto de las demás alternativas. El segundo,  $\Phi^-(a)$  está basado en las relaciones de preferencia “peor” y “mucho peor” y mediante un valor entre 0 y 1 indica cuán peor es  $a$  respecto de las demás alternativas.  $\Phi^+(a)$  y  $\Phi^-(a)$  se calculan como sigue:

$$\Phi^+(a) = (\sum_{n=1, \dots, (N-1)} (\mu_{>>}(a, n) \wedge C_{>>}(a, n) + \mu_{>}(a, n) \wedge C_{>}(a, n)) / (\sum_{n=1, \dots, (N-1)} C_{>>}(a, n) + \sum_{n=1, \dots, (N-1)} C_{>}(a, n))$$

$$\Phi^-(a) = (\sum_{n=1, \dots, (N-1)} (\mu_{<<}(a, n) \wedge C_{<<}(a, n) + \mu_{<}(a, n) \wedge C_{<}(a, n)) / (\sum_{n=1, \dots, (N-1)} C_{<<}(a, n) + \sum_{n=1, \dots, (N-1)} C_{<}(a, n))$$

, donde  $N$  es el número de alternativas y  $\wedge$  es un operador que puede ser reemplazado por el operador “mínimo” (lo cual no da compensación) o por el operador Zimmermann-Zysno, el cual permite utilizar grados de compensación variables (Munda, 1995).

Por último, para realizar el *análisis de equidad* se debe empezar por la creación de una *matriz de equidad*, la cual da una indicación verbal (o lingüística) del juicio emitido por el grupo de interés para cada una de las alternativas. La *distancia semántica* es también utilizada en este caso para calcular los *índices de similaridad* entre los grupos de interés. A partir de la *matriz de equidad* se construye entonces una *matriz de similaridad*, la cual da un índice, para cada par de grupos de interés  $i, j$ , acerca de la similaridad de los juicios acerca de las alternativas propuestas. Este índice  $S_{ij}$  es calculado de la siguiente manera:

$$S_{ij} = 1/(1+d_{ij})$$

, donde  $d_{ij}$  es la distancia de Minkovsky entre el grupo  $i$  y el grupo  $j$ , y es calculada a su vez como sigue:

$$d_{ij} = \sqrt[p]{\sum (S_k(i,j))^p}$$

, donde  $S_k(i,j)$  es la distancia semántica entre el grupo  $i$  y el grupo  $j$  en el juicio de la alternativa  $k$ .  $N$  es el número de alternativas y  $p > 0$  es el parámetro de la distancia de Minkovsky (Munda, 1995).

A través de una secuencia de reducciones matemáticas, se forma el *dendograma de formación de coaliciones*, el cual identifica la posible formación de coaliciones para los valores decrecientes de los índices de similaridad y el grado de conflicto entre los grupos de interés.

## Conclusiones

Los métodos para la toma de decisiones con múltiples criterios son útiles para ayudar a resolver problemas complejos, en los que es necesaria la comparación de alternativas, considerando varios puntos de vista simultáneamente.

La naturaleza intangible de determinado tipo de criterios, puede ser manipulada mediante el uso de expresiones semánticas, extraídas del lenguaje cotidiano.

Existen modelos que permiten expresar matemáticamente los conceptos de "preferencia", "indiferencia" e "incomparabilidad".

Debido al grado de conflicto que presentan los temas de economía y a la subjetividad de muchos de sus aspectos, los métodos para la toma de decisiones con múltiples criterios, son potencialmente útiles para el análisis de decisiones en dicho campo.

## **Bibliografía**

**Aguilar, Alejandra;** "Conflicto y Colaboración en el manejo de recursos" CIDD-IDRC, Canadá; 1999.

**Bana e Costa, C.;** Vansnick, J.C.. "Fundamentos de MacBeth: Ideas Basicas y Software de Aplicaciones". Summer School on MCDA; 2000.

**Bouyssou, D.;** "Building Criteria: A prerequisite for MCDA / Readings in Multiple Criteria Decision Aid". 2000.

**Bouyssou, D.;** Marchant, T; Pirlot, M.; "Evaluation and Decision Models: A Critical Perspective". Kluwer Academic Publish. 2000.

**Brans, J.P.;** "Multicriteria Decision Aid: The Promethee-Gaia Solution". 1997.

**Buchanan, Leigh;** "Toma de Decisiones: Una breve historia". Harvard Business Review, Enero 2006.

**Forman E.;** "Toma de Decisiones Multicriterio y el Proceso Analítico Jerárquico", 1990.

**Gallagher, Charles.;** "Métodos Cuantitativos para la Toma de Decisiones en Administración", McGraw-Hill, 2004.

**Hammond J.;** "Las Trampas Ocultas en la Toma de Decisiones"; Harvard Business Review. Septiembre-Octubre 1998.

**Marín-Zamora, Carlos;** "Toma de Decisiones"; Revista Acta Académica, Universidad Autónoma de Centro América, No 22, Mayo-1998.

**Munda, G.;** "Multicriteria Evaluation in a Fuzzy Environment: Theory and Applications in Ecological Economics"; 1995.

**Munda, G.;** "Manual de NIADE". Versión 1.0; 2001.

**Paruccini, M.;** "Applying Multiple Criteria Aid for Decision to Environmental Management"; Kluwer Academic Publishers. 1993.

**Saati, T.;** "Método de Optimización Multiobjetivo"; McGraw-Hill; 1971.

**Sanchez, R.;** "Análisis de Costos Intangibles y Beneficios utilizando AHP"; Tesis Doctoral para el grado de Doctor en Economía; Universidad Católica de Chile; 1999.

## Anexos

### Aplicación del método AHP

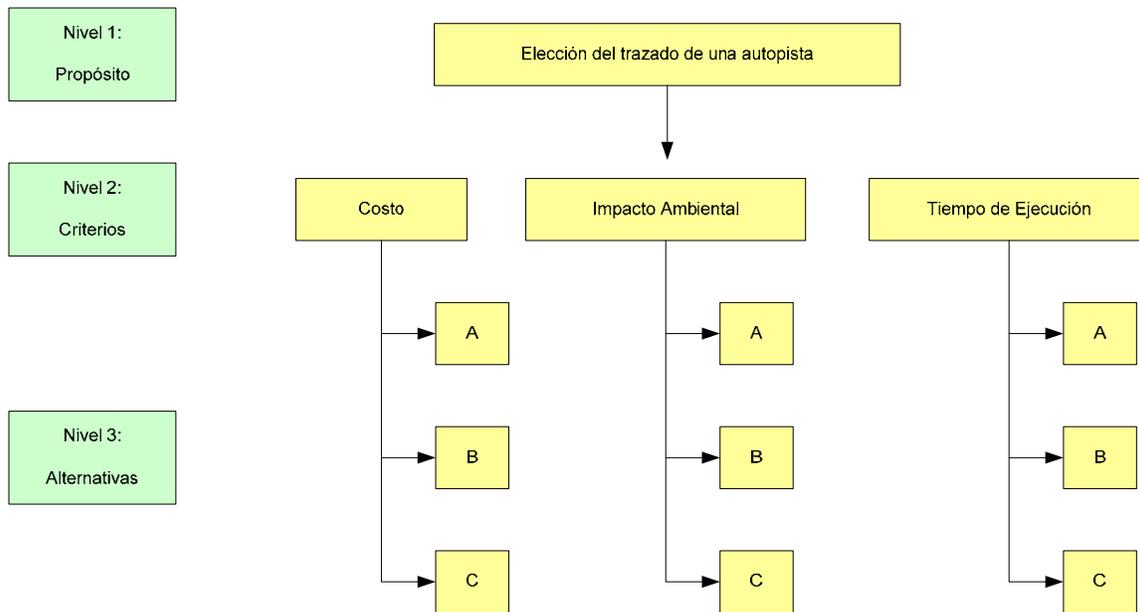
#### Problema de selección del trazado de un tramo de autopista

El problema de decisión consiste en elegir el trazado de un tramo de autopista. Existen tres trazados o alternativas posibles que denominamos A, B y C, que se evalúan con base en tres criterios:

- A1: Costo de ejecución
- A2: Impacto ambiental
- A3: Tiempo de ejecución

Supuestos:

- El decisor considera que el criterio costo, es 2 veces más importante que el criterio impacto ambiental y 5 veces más importante que el criterio tiempo de ejecución. Además, el criterio impacto ambiental es 3 veces más importante que el criterio tiempo de ejecución.
- Desde el punto de vista del *criterio costo*, el decisor considera que la alternativa A, es 6 veces más importante que la alternativa B y 3 veces más importante que la alternativa C y que además, C es el doble de importante que B.
- Desde el punto de vista del *criterio impacto ambiental*, el decisor considera que la alternativa B, es 9 veces más importante que A, el doble de importante que C y que C es 5 veces más importante que A.
- Desde el punto de vista del *criterio tiempo de ejecución*, el decisor considera que la alternativa B, es el doble de importante que A y que C, es 4 veces más importante que A y el doble de importante que B.



La matriz de criterios para el nivel jerárquico dos es la siguiente:

		ATRIBUTOS		
		A1	A2	A3
ATRIBUTOS	A1: Costo	1	2	5
	A2: Impacto Ambiental	1/2	1	3
	A3: Tiempo de Ejecución	1/5	1/3	1

La solución de esta matriz<sup>2</sup> que da por resultante lo que se conoce como *vector de criterios*, es:

Pesos relativos al nivel 2:  $W = (0.5813, 0.3092, 0.1095)$

La matriz de criterios para el nivel jerárquico tres, es la siguiente:

		Costo	ALTERNATIVAS		
			A	B	C
ALTERNATIVAS	A		1	6	3
	B		1/6	1	2
	C		1/3	1/2	1

Pesos relativos al nivel 3 – Costo:  $W = (0.6556, 0.1926, 0.1518)$

<sup>2</sup> La solución de la matriz se omite por ser un procedimiento matemático, sin embargo la misma puede resolverse por medio de programación por metas o por determinantes.

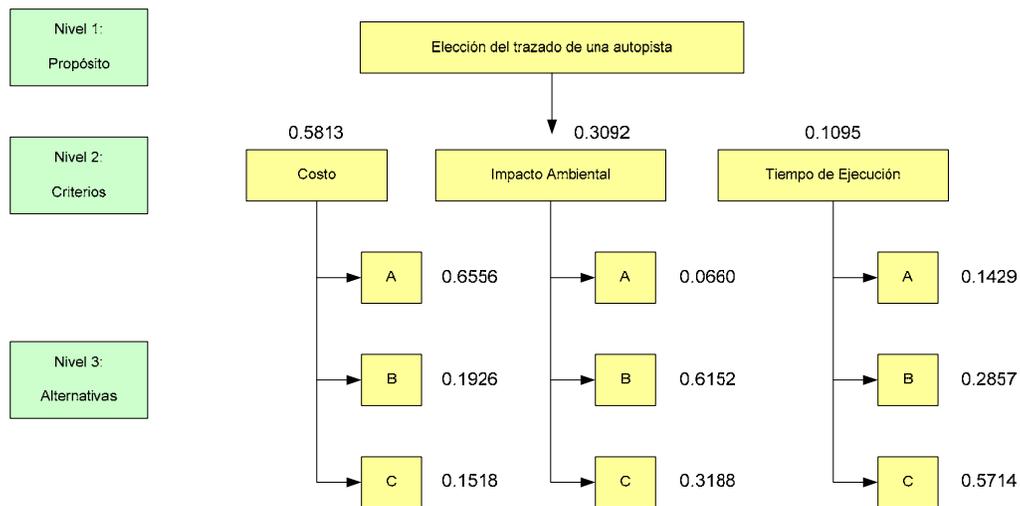
Impacto Ambiental		ALTERNATIVAS		
		A	B	C
ALTERNATIVAS	A	1	1/9	1/5
	B	9	1	2
	C	5	1/2	1

Pesos relativos al nivel 3 – Impacto Ambiental:  $W = (0.0660, 0.6152, 0.3188)$

Tiempo de Ejecución		ALTERNATIVAS		
		A	B	C
ALTERNATIVAS	A	1	1/2	1/4
	B	2	1	1/2
	C	4	2	1

Pesos relativos al nivel 3 – Tiempo de Ejecución:  $W = (0.1429, 0.2857, 0.5714)$

Determinación de los pesos globales:



Alternativa A:  $0.5813 \cdot 0.6556 + 0.3092 \cdot 0.0660 + 0.1095 \cdot 0.1429 = 0.4172$

Alternativa B:  $0.5813 \cdot 0.1926 + 0.3092 \cdot 0.6152 + 0.1095 \cdot 0.2857 = 0.3335$

Alternativa C:  $0.5813 \cdot 0.1518 + 0.3092 \cdot 0.3188 + 0.1095 \cdot 0.5714 = 0.2493$

El trazado A del tramo de la autopista es la mejor solución

## Aplicación del método Electra

### Problema de selección de inversiones

Supongamos el caso de un centro decisor que tiene que ordenar preferencialmente cinco inversiones (alternativas) que denominamos A, B, C, D y E que se evalúan con base en cinco criterios:

- A<sub>1</sub>: Valor actual neto (VAN)
- A<sub>2</sub>: Tasa interna de rendimiento (TIR)
- A<sub>3</sub>: Nivel de empleo,
- A<sub>4</sub>: Volumen de ventas
- A<sub>5</sub>: Impacto ambiental

Todos los criterios son de maximizar, excepto el último que es de minimizar.

El decisor proporciona a cada atributo los siguientes pesos preferenciales:  $W = (0.25, 0.25, 0.20, 0.10, 0.20)$

Los datos de partida, es decir, la **MATRIZ DECISIONAL**, viene dada en la siguiente tabla:

	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>
A	100	15	7	40	50
B	200	25	7	60	200
C	100	20	4	25	25
D	200	30	20	70	350
E	250	25	15	100	500

Todos los criterios son de maximizar, excepto el último que es de minimizar.

ALTERNATIVAS	ALTERNATIVAS				
	A	B	C	D	E
A	-	0.300	0.425	0.200	0.200
B	0.700	-	0.800	0.325	0.325
C	0.575	0.200	-	0.200	0.200
D	0.800	0.675	0.800	-	0.650
E	0.800	0.675	0.800	0.350	-

Fila 1

$$C(A,B) = 0 + 0 + \frac{1}{2} (0.200) + 0 + 0.200 = 0.300$$

$$C(A,C) = \frac{1}{2} (0.250) + 0 + 0.200 + 0.100 + 0 = 0.425$$

$$C(A,D) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0.200 = 0.200$$

$$C(A,E) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0.200 = 0.200$$

La matriz de decisión una vez normalizada queda de la siguiente forma:

ALTERNATIVAS	ALTERNATIVAS				
	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>
A	0.67	1.00	0.44	0.53	0.11
B	1.33	1.67	0.44	0.80	0.42
C	0.67	1.33	0.25	0.33	0.05
D	1.33	2.00	1.25	0.93	0.74
E	1.67	1.67	0.94	1.33	1.05

$$R(A, A_1) = R(C, A_1) = 100/(250-100) = 0.67$$

$$R(B, A_1) = R(B, A_1) = 200/(250-100) = 1.33$$

$$R(E, A_1) = R(E, A_1) = 250/(250-100) = 1.67$$

Matriz de decisión normalizada y ponderada:

ALTERNATIVAS	ALTERNATIVAS				
	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>
A	0.17	0.25	0.09	0.05	0.02
B	0.33	0.42	0.09	0.08	0.08
C	0.17	0.33	0.05	0.03	0.01
D	0.33	0.50	0.25	0.09	0.15
E	0.42	0.42	0.19	0.13	0.21

Columna 1: elementos de la columna 1 de la matriz de decisión normalizada por 0.25

Columna 2: elementos de la columna 2 de la matriz de decisión normalizada por 0.25

Columna 3: elementos de la columna 3 de la matriz de decisión normalizada por 0.25

Matriz de decisión normalizada y ponderada:

ALTERNATIVAS	ALTERNATIVAS				
	A	B	C	D	E
A	-	1.00	1.00	1.00	1.00
B	0.38	-	0.44	1.00	0.79
C	0.45	1.00	-	1.00	1.00
D	0.51	0.39	0.68	-	0.99
E	0.76	1.00	0.81	1.00	-

$$d(A,B) = \frac{\max |0.17-0.33; 0.25-0.42; 0.05-0.08|}{\max |0.17-0.33; 0.25-0.42; 0.05-0.08; 0.21-0.08|} = \frac{0.17}{0.17} = 1$$

$$d(A,B) = \frac{\max |0.15-0.02|}{\max |0.33-0.17; 0.5-0.25; 0.25-0.09; 0.09-0.05; 0.15-0.02|} = \frac{0.13}{0.25} = 0.51$$

Matriz de índices de concordancia:

ALTERNATIVAS	ALTERNATIVAS				
	A	B	C	D	E
A	-	0.300	0.425	0.200	0.200
B	0.700	-	0.800	0.325	0.325
C	0.575	0.200	-	0.200	0.200
D	0.800	0.675	0.800	-	0.650
E	0.800	0.675	0.800	0.350	-

Matriz de índices de discordancia:

ALTERNATIVAS	ALTERNATIVAS				
	A	B	C	D	E
A	-	1.00	1.00	1.00	1.00
B	0.38	-	0.44	1.00	0.79
C	0.45	1.00	-	1.00	1.00
D	0.51	0.39	0.68	-	0.99
E	0.76	1.00	0.81	1.00	-

Umbral mínimo de concordancia:  $c=0.5$  (valores medio de la matriz de índices de concordancia)

Umbral máximo de discordancia:  $d=0.81$  (valores medio de la matriz de índices de discordancia)

Matriz de dominancia concordante:

ALTERNATIVAS	ALTERNATIVAS				
	A	B	C	D	E
A	-	0	0	0	0
B	1	-	1	0	0
C	1	0	-	0	0
D	1	1	1	-	1
E	1	1	1	0	-

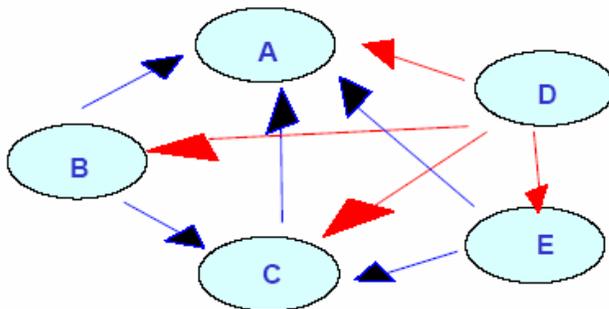
Matriz de dominancia discordante:

ALTERNATIVAS	ALTERNATIVAS				
	A	B	C	D	E
A	-	0	0	0	0
B	1	-	1	0	1
C	1	0	-	0	0
D	1	1	1	-	1
E	1	0	1	0	-

Matriz de dominancia agregada (concordante-discordante)

ALTERNATIVAS	ALTERNATIVAS				
	A	B	C	D	E
A	-	0	0	0	0
B	1	-	1	0	0
C	1	0	-	0	0
D	1	1	1	-	1
E	1	0	1	0	-

Grafo Electra:



Núcleo del grafo Electra:  
Alternativa D

## **Glosario Multicriterio**

### **AGREGACIÓN**

Los algoritmos de agregación consisten en la aplicación de procedimientos matemáticos para sintetizar los valores obtenidos por cada alternativa, respecto de todos los criterios considerados en el análisis. Los valores obtenidos pueden referirse, tanto a las puntuaciones de las alternativas respecto de algún criterio, como a la utilidad que reporta el puntaje obtenido en dicho criterio.

Los mecanismos más conocidos de agregación, son los que se obtienen de la ponderación lineal, o multiplicativa; en tanto que en las metodologías del tipo ELECTRE o PROMETHEE, las formas de agregación están dadas por la lógica de las relaciones de superación. Cabe destacar, que en dichos métodos también se procede a una agregación de los varios preórdenes obtenidos mediante la obtención del llamado orden mediano.

### **ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD**

Se refiere a las diversas técnicas empleadas para vincular los parámetros y datos iniciales de un modelo, con los resultados o soluciones del mismo. La vinculación puede consistir en:

- i) los rangos posibles de variación de datos iniciales o parámetros, que no afectan a los resultados;
- ii) el cálculo de una medida global de "robustez" de una solución sin referencias directas a cambios en los parámetros o datos iniciales.

### **ANÁLISIS O EVALUACIÓN MULTICRITERIO**

Es el mundo de conceptos, aproximaciones, modelos y métodos, para auxiliar a los centros decisores a describir, evaluar, ordenar, jerarquizar, seleccionar o rechazar objetos, con base en una evaluación (expresada por puntuaciones, valores o intensidades de preferencia) de acuerdo con varios criterios.

## **ATRIBUTOS O CRITERIOS**

Son los puntos de vista considerados relevantes para el análisis o resolución de un problema. Constituyen la base para la toma de decisiones, base que puede ser medida y evaluada. Es la evidencia sobre la cual se basa una decisión, o dicho de otro modo es un aspecto medible de un juicio, por el cual puede ser caracterizada una dimensión de las alternativas bajo análisis.

Estos criterios pueden representar diferentes aspectos de la teleología: objetivo, metas, valores de referencia, niveles de aspiración o utilidad. En el planteo de la matriz de decisión o en la caracterización de un problema, la identificación de los criterios pertinentes al mismo, es de gran importancia para el logro de los objetivos. La forma en que puede ser medido o caracterizado el criterio, también es un aspecto de gran importancia, ya que de ello dependerá en gran parte el resultado final del proceso de evaluación.

Desde un punto de vista operativo los atributos pueden ser clasificados en tres grupos:

- i) de beneficio, en los que la preferencia o la utilidad es creciente con el valor o puntaje del mismo;
- ii) de costos, los que ofrecen una utilidad monotónica decreciente: cuanto mayor el puntaje, menor es la preferencia, y
- iii) no monótonos, tales como el contenido de azúcar en la sangre, donde la utilidad máxima es obtenida en un valor intermedio dentro del rango posible.

## **CRITERIO ESTRICTO**

Dadas dos alternativas  $a$  y  $b$  y sus puntajes respecto de un criterio genérico, por ejemplo  $g(a)$  y  $g(b)$  obtenidas de la matriz de valoración, si la diferencia  $g(a) - g(b)$  es no nula (distinta de cero), tal diferencia, por pequeña que sea, es suficiente en el caso de trabajar con criterios estrictos, para afirmar que la acción  $a$  es preferida a la acción  $b$  (con  $g(a) > g(b)$ ) o que la acción  $b$ , es preferida a la acción  $a$  (con  $g(b) > g(a)$ ), respecto del criterio considerado.

## **ÍNDICES BINARIOS DE PREFERENCIA**

Una dificultad para comparar alternativas con ayuda de modelos, es que la confianza en los resultados está afectada negativamente por la inevitable imprecisión en los respectivos parámetros. Resulta, entonces útil, contar con herramientas que expresen el grado de confianza en los resultados del modelo, cuando se comparen dos alternativas cualesquiera. Con este propósito se proponen índices binarios que resultan de un análisis de sensibilidad sobre determinados parámetros del modelo, el cual se considera aditivo (o aditivo general). Estos índices sirven para estimar si el resultado de comparar dos alternativas, es suficientemente confiable o si es conveniente un análisis más detallado con información adicional, para decidir cuál de ellas es mejor. Estos índices fueron desarrollados de manera independiente por Carlos Bana e Costa en 1990 y, Mayra Trejos en 1991 y Servio Guillén en 1993.

## **ÍNDICE MULTICRITERIO Y MULTIACTOR**

El siguiente índice ayuda en la toma de decisiones en grupo; en él cada participante expresa sus tasas de sustitución (trade off) no de manera precisa, sino mediante intervalos de indeterminación. Este índice es acorde con la regla de la mayoría de Condorcet. Se calcula considerando que el voto de cada actor se distribuye, entre cada par de alternativas que se comparan, proporcionalmente al volumen del dominio de indeterminación, contenido en el semiespacio del hiperplano de indiferencia de dos alternativas.

## **MATRIZ DE VALUACIÓN, DE PUNTUACIÓN O DE DECISIÓN**

Es una matriz que resume las informaciones pertinentes al problema bajo análisis. Cualquier problema multicriterio puede expresarse de forma concisa en formato matricial, en donde las columnas representan los atributos o criterios relevantes al problema y las filas representan las alternativas en competencia. De este modo, un elemento genérico  $X_{ij}$  de la matriz, indica la valuación o performance (utilidad o puntaje) de la  $i$ -ésima alternativa  $A_i$  respecto del  $j$ -ésimo atributo o criterio  $C_j$ .

Este orden de filas y columnas no es imperativo, ya que muchos autores transponen el mismo. Es común incluir en la parte superior o inferior de la matriz de valuación, el peso o ponderación que se la ha asignado a cada criterio.

## **MÉTODO ARIADNE**

Es un método interactivo, propuesto por Ambrosio Goicochea en 1991. Calcula, mediante un modelo lineal, los valores máximo y mínimo posibles de cada alternativa, de acuerdo con los pesos obtenidos por programación lineal y a partir de la información de preferencias, que el decisor proporcione.

## **MÉTODO MACBETH**

El método MACBETH es un método interactivo que mide el grado de preferencia de un decisor sobre un conjunto de alternativas. Fue desarrollado por Carlos Bana e Costa, de la Universidad de Lisboa, Portugal, y Jean Claude Vansnick de la Universidad de Mons-Hainaut, Bélgica, en 1994. Construye una función criterio de un punto de vista fundamental y determina los parámetros relacionados con la información entre criterios (pesos) en la fase de agregación.

Para la construcción de la función criterio de cada punto de vista, la preferencia es local; es decir, que los juicios del decisor conciernen únicamente a un solo punto de vista fundamental. Para determinar los pesos se usan los juicios del decisor acerca de la preferencia total de las alternativas. Estos permiten a MACBETH representar la información de manera cuantitativa mediante la relación de todos los criterios, dentro de un modelo de evaluación global.

## MÉTODOS COMPENSATORIOS Y NO COMPENSATORIOS

Estos métodos se diferencian sobre la base de si las ventajas de un determinado atributo o criterio pueden ser intercambiadas por las desventajas de otro atributo, o si este intercambio no es posible.

Una estrategia de elección es compensatoria si los intercambios de logros entre atributos (trade-offs) están permitidos. La estrategia será No Compensatoria si no están autorizadas dichas compensaciones.

Los métodos de Ponderación Lineal, de Utilidad Multiatributo y el Proceso Analítico Jerárquico son típicamente compensatorios; en tanto que los métodos ELECTRE no lo son, tal como ocurre por otra parte con el método lexicográfico y el método de eliminación por aspectos.

## NORMALIZACIÓN

Las puntuaciones en los atributos son normalizadas a efectos de eliminar problemas de cálculo originados en la utilización de diferentes escalas o unidades utilizadas en la matriz de decisión. La normalización no siempre es necesaria, pero sí es esencial en la mayoría de los métodos compensatorios. El propósito de la normalización es obtener escalas comparables, lo que permitirá realizar comparaciones intra-atributos, así como las interatributos. En consecuencia, los puntajes normalizados no tienen unidades de dimensión y, para el caso de atributos de beneficios, cuanto mayor sea el puntaje normalizado, mayor es la preferencia del mismo.

Los procedimientos de normalización más utilizados son: los de fracción del máximo, fracción de la norma, o fracción de intervalo.

Los atributos no monótonos (aquellos cuya preferencia crece hasta un máximo, a partir del cual decrece la preferencia, como por ejemplo la temperatura para el cuerpo humano) pueden ser convertidos a atributos monótonos mediante la transformación estadística  $Z$ .

## ORDENAMIENTO POR LA MEDIANA

Forma parte de los métodos que tratan con atributos cualitativos. Con dicho tipo de datos se puede fácilmente trabajar mediante ordenamientos o mediante comparaciones de pares. El método de la mediana permite trabajar con atributos cualitativos, con los cuales se pueden elaborar ordenamientos parciales.

Si el decisor se enfrenta a un problema en el que tiene que resolver un ordenamiento sobre atributos cualitativos, el establecimiento de ordenamientos parciales respecto de cada atributo constituye una base inicial, pero debe tomarse en cuenta, que las operaciones aritméticas no están permitidas respecto de las escalas de orden, lo que dificulta el proceso de agregación. Una forma de obtener un consenso en el ordenamiento final, es crear un ordenamiento que difiera lo menos posible de los todos los ordenamientos parciales. Cook y Seiford (1978) introdujeron una función de distancia, que puede usarse para medir el grado de acuerdo o de desacuerdo entre ordenamientos. Con el grado de acuerdo calculado se elabora una matriz de distancias entre alternativas bajo análisis.

A partir de la matriz de distancias se trata de ordenar los elementos cuya suma de distancias es mínima, lo cual puede realizarse utilizando varios métodos, uno de los más conocidos es el llamado Método Húngaro, definido por Kuhn en 1955.

En consecuencia, este enfoque se denomina ordenamiento por mediana debido a que el ordenamiento global difiere tan poco como sea posible de los ordenamientos parciales obtenidos respecto de cada atributo.

Actualmente el método de la mediana ha sido adaptado para la toma de decisiones en grupos (*Hwang y Lin, 1987*), partiendo de un problema planteado por Cook y Seiford (1978), en el cual se trataba el problema de combinar las preferencias ordinales de  $n$  personas, de forma a lograr un consenso. En el caso presente se trata de combinar  $n$  atributos u ordenamiento de atributos, a efectos de obtener un ordenamiento de consenso, lo cual constituye una estructura formalmente análoga al del consenso de grupo.

## OTROS MÉTODOS SIMPLES

Es posible la aplicación de otros métodos, algunos de ellos de tipo no compensatorio, pero que no se encuentran necesariamente vinculados a la determinación de funciones de utilidad, o que están vinculados a dichas funciones, pero solamente desde un punto de vista formal.

Método Lexicográfico (o de dictadura). Se parte de una matriz de valuación, para la cual se han determinado las escalas apropiadas y se designa un criterio principal, que será el criterio dictador. Aquella acción potencial que obtiene la mejor puntuación en ese criterio queda consagrada como la "mejor" acción. En caso de que hubiera empate entre pares de acciones, luego de efectuada esta primera selección, se aplica un procedimiento de desempate que consiste en recurrir al segundo criterio en orden de importancia (aquella acción que obtiene la mejor nota con el segundo criterio, es la que queda clasificada como la mejor), o en el tercer criterio si fuera necesario, y así seguido.

Este procedimiento no es tan trivial como pudiera creerse, ya que es utilizado frecuentemente en decisiones económicas: la selección de proyectos sobre la base del mayor valor presente neto, constituye un típico procedimiento basado en un criterio dictatorial.

El procedimiento se denomina lexicográfico, ya que de este mismo modo se ordenan las palabras del diccionario: el criterio dictatorial es la primera letra, luego los casos de empate son resueltos con la segunda letra y así seguido.

El Método Jerárquico o conjuntivo, atenúa un poco los excesos del mecanismo lexicográfico precedente. También se parte de una matriz de valuaciones, basada en escalas libremente electas. También los criterios son ordenados por orden de importancia. Cuando se analizan las acciones en relación con el criterio más importante, simplemente se eliminan aquellas alternativas que no hayan logrado obtener una puntuación o nivel mínimo respecto de tal criterio. Esto opera una primera selección, a partir de la cual se consideran las evaluaciones relativas al segundo criterio en orden de importancia y, de entre las alternativas que pasaron el primer filtro, se eliminan aquellas que tampoco hayan logrado un puntaje o nivel mínimo requerido para este segundo criterio. Se sigue con este procedimiento hasta cubrir el criterio menos importante, en la medida que el proceso de selección no haya finalizado antes.

El método de democracia es aquel que considera también una matriz de valuaciones, con sus respectivas escalas, para el cual se comparan alternativas de dos en dos. La regla de asignación democrática establece que una acción  $a$ , es mejor que una acción  $b$  si esta superioridad ha sido evidenciada en más de la mitad de los criterios bajo análisis. Cuando los criterios tienen diferentes ponderaciones, lo que sucede en la mayoría de los casos, la regla establece que los criterios para los cuales se fundamenta la superioridad de una alternativa sobre otra, debe reunir más de la mitad de los pesos. Procediendo de este modo por comparaciones sucesivas, se podría establecer una clasificación de las acciones potenciales y, en consecuencia, seleccionar la "mejor" de tales alternativas.

El problema con este procedimiento radica en que puede llevar a circuitos no deseados, del tipo de los que se encuentran en los torneos. Tales circuitos han recibido, desde el siglo XVIII el nombre de Paradoja de *Condorcet* (1785), y han sido determinados más recientemente como casos particulares del Teorema de *Arrow* (1951).

Eliminación por aspectos: es un procedimiento muy parecido al método lexicográfico, y fue sugerido por Tversky (1972) (Elimination by Aspects). Igual que en el método lexicográfico, se examina un atributo por vez y se realizan las comparaciones entre las alternativas, eliminando aquellas que no cumplen con algún estándar o valor de base predeterminado. La diferencia con el método anterior consiste en que los criterios no están ordenados por orden de importancia, sino en términos de su poder de discriminación probabilística. Esto es, los atributos son utilizados y priorizados en términos de su orden de verosimilitud para que fallen las alternativas: estas son eliminadas según los aspectos más probables de fallo.

Sea  $X_1$  el aspecto más efectivo para eliminar la mayor cantidad posible de alternativas,  $X_2$  el segundo más efectivo y así seguido. El conjunto de alternativas  $A^1$ , será seleccionado si cumple:

$$A^1 = \{A_i \mid x_{i1} \text{ satisface } X_1\}, i = 1, 2, \dots, m.$$

Si el conjunto  $\{A^1\}$  posee un único elemento, entonces este elemento es la alternativa preferida. Si hay varios elementos, se considera el próximo aspecto más importante  $X_2$ :

$$A^2 = \{A^1 \mid x_{i2} \text{ satisface } X_2\}, i \in \{A^1\}.$$

Si este conjunto posee un único elemento, el proceso se detiene y esta alternativa es la seleccionada; de otro modo, se considera el próximo aspecto más importante  $X_3$  y así seguido.

## **PONDERACIÓN LINEAL**

El método de ponderación lineal es probablemente el más conocido y el más corrientemente utilizado en los métodos MC. Con dicho método se obtiene una puntuación global por simple suma de las contribuciones obtenidas de cada atributo. Si se tienen varios criterios con diferentes escalas, dado que los mismos no son sumables en forma directa, se requiere un previo proceso de normalización, para que pueda efectuarse la suma de contribuciones de los atributos. Debe tomarse en cuenta, sin embargo, que el orden obtenido con este método no es independiente del procedimiento de normalización aplicado.

## **PREFERENCIAS BORROSAS**

La incorporación de vaguedad e imprecisión como fuente de incertidumbre en la solución de problemas MC, ha sido un aspecto que tradicionalmente fue tratado mediante los análisis de sensibilidad. Sin embargo, la aparición de un cuerpo axiomático de la lógica borrosa o difusa en 1965, permitió incorporar, aunque de modo lento, técnicas más adecuadas para el tratamiento de estas cuestiones. Es así como una de las primeras formas abordadas de incertidumbre mediante preferencias borrosas, es la correspondiente a ELECTRE III, con la introducción del concepto de seudocriterio, del mismo modo que es introducida en el método ELECTRE IS.

Con el método TODIM se han hecho aplicaciones más concretas de las herramientas disponibles de la lógica borrosa. Por otra parte, la escuela de la Universidad de Helsinki trabaja actualmente con el método AHP, mediante la consideración comparación por intervalos. Cabe mencionar, por último, la consideración de problemas bajo el enfoque de programación compromiso borrosa, en donde el ordenamiento de alternativas se basa en distancias métricas borrosas.

## **PROBLEMÁTICA DEL APOYO A LA DECISIÓN**

Problemática P.  $\alpha$ : el objetivo es esclarecer la decisión, mediante la selección de un subconjunto lo más restringido posible, teniendo en cuenta, que la selección final se centra en unas pocas acciones. Este subconjunto contendrá las "mejores" acciones o las acciones "satisfactorias". El resultado es una selección o un procedimiento de selección.

Problemática P.  $\beta$  : pretende esclarecer una decisión mediante una clasificación resultante de asignar cada acción a una categoría (o clase). Las diferentes categorías se definen a priori, a partir de normas aplicables al conjunto de las acciones. El resultado es una clasificación o procedimiento de asignación de las acciones.

Problemática P.  $\gamma$ : busca esclarecer una decisión mediante un arreglo obtenido reagrupando todas o parte (las más satisfactorias) de las acciones en clases de equivalencia, ordenando estas clases de modo completo o parcial, conforme con las preferencias del decisor. El resultado es un arreglo o una ordenación de las acciones.

Problemática P.  $\delta$ : apunta a esclarecer una decisión mediante una descripción, con un lenguaje apropiado, de las acciones y de sus consecuencias. El resultado es una descripción o un procedimiento cognitivo de las posibles relaciones causales, entre estos elementos.

Problemática P.  $\epsilon$ : se propone esclarecer una decisión sobre varias acciones, que debe ser tomada en un contexto de restricciones de tipo técnicas, político-administrativas, financieras o de disponibilidad de recursos en general. El resultado es la selección de un subconjunto de acciones, que cumple con las restricciones impuestas y representa una solución "mejor" o "satisfactoria" en términos de alguna función de utilidad o de valor del decisor.

## **RELACIÓN DE SUPERACIÓN**

Utilizada en los métodos ELECTRE y en los análisis de concordancia en general, se refiere a la comparación de dos alternativas respecto de todos los criterios, mediante el uso de relaciones binarias.

Formalmente  $a$  supera a  $b$  ( $a S b$ ), si existen suficientes motivos a favor de  $a$  (se trata de la concordancia en términos de cantidad de criterios o de peso de los criterios favorables) y si no, se registran opiniones fuertemente contrarias a  $a$  (es la discordancia, ejercida como derecho de veto, medida como una gran diferencia de puntaje en  $a$ , para alguno de los criterios bajo análisis). Cuando se verifican estas dos circunstancias, es posible afirmar que  $a$  supera a  $b$ .

En general dadas dos alternativas  $a$  y  $b$ , es posible encontrar las siguientes situaciones:

$a S b$  o  $b S a$ ,

$a S b$  y  $b S a$ , lo que implica que  $a I b$  ( $a$  es indiferente o equivalente a  $b$ )

$a$  y  $b$  son incomparables; es decir, no se verifica ninguna de las circunstancias anteriores.

Las relaciones de superación no son necesariamente transitivas. Esto es, si  $a S b$  y  $b S c$ , ello no necesariamente implica que  $a S c$ . Esto hace que este método sea simultáneamente práctico y ambiguo, a semejanza de multitud de casos que se encuentran en la vida cotidiana. La relación de superación en ELECTRE, se determina aplicando índices de concordancia y de discordancia en forma simultánea.

## REVERSIÓN DEL ORDEN O DE RANGO

Los primeros autores que desarrollaron la teoría de la utilidad (Luce y Raiffa, 1957), impusieron un axioma según el cual, al introducir en el análisis nuevas alternativas, particularmente aquellas que son irrelevantes, no debería producirse inversión de orden en las restantes alternativas. Sin embargo, se encontró, en algunos estudios hechos en forma experimental, que en ciertas ocasiones se producen paradojas a las cuales la teoría de la utilidad no puede brindar respuestas claras.

En algunas circunstancias el método AHP produce esta reversión de rangos, y la respuesta de Saaty a este caso y a las objeciones formuladas por varios autores, es que debe distinguirse entre fijar axiomas en una teoría de la decisión, a ser seguidos estrictamente en todas las situaciones y un proceso de aprendizaje y de revisión del

proceso de toma de decisiones. A tal fin menciona, que los axiomas de preservación del rango de la teoría de la utilidad y el AHP, comparan los axiomas del clásico método frecuentista de estadística y de la teoría Bayesiana. La teoría Bayesiana viola los axiomas de estadística, al poner al día las predicciones mediante la inclusión de información de un resultado anterior, un proceso conocido como aprendizaje. Cuando se integra aprendizaje con toma de decisiones, se cuestionan algunos de los axiomas básicos de la teoría de utilidad.

En definitiva, Saaty explica que en AHP, hay una manera de permitir que el orden cambie (1) y dos maneras de preservar el orden (2) y (3):

(1) La inversión del orden puede ser permitida, utilizando el modo distributivo del enfoque de medida relativa del AHP

(2) La preservación del orden, en caso de alternativas irrelevantes, puede ser mantenido usando el modo ideal del enfoque de medida relativa del AHP

(3) Se puede preservar el orden absolutamente, usando el modo de medida absoluta del AHP

## **SEUDOCRITERIO**

Puede ocurrir, que la diferencia de puntajes de dos acciones respecto de algún criterio ( $g(a) - g(b)$ ) sea considerada demasiado pequeña para tener algún significado determinante; se trata de una situación de indiferencia entre ambas acciones. En la práctica ello consiste en fijar un valor  $q$ , llamado umbral  $d$ , y en determinar que las alternativas son equivalentes respecto al criterio considerado, si el desvío de puntajes es menor a  $q$ .

Si, por el contrario, el desvío es muy fuerte, mayor en valor absoluto a un parámetro  $p$ , llamado umbral de preferencia, la alternativa con mayor puntaje es la preferida.

Entre ambos intervalos se puede registrar una zona de preferencia débil, una transición entre la indiferencia y la preferencia estricta, tal como se muestra a continuación:

A B I I B A

-----|-----|-----|-----|-----|-----> nota de  
a menos nota de b

-p -q 0 q p

A es zona de preferencia estricta

B es zona de preferencia débil

I es zona de indiferencia

El establecimiento de los parámetros **p** y **q**, se realiza tanto para el índice de concordancia como para el índice de discordancia. La noción de seudo criterio, constituye la originalidad de ELECTRE IS y particularmente de ELECTRE III, donde se establece el "grado de credibilidad" de la relación de superación entre una alternativa y otra, grado de credibilidad que varía entre 0 y 1.

## TODIM

Introducida por *Gomes y Lima* (1992) tiene la ventaja de intentar un modelaje de las pautas de preferencia, cuando se toman decisiones de riesgo, de acuerdo con los fundamentos de la Teoría de Prospectos (*Kahneman y Tversky, 1979*).

El método utiliza una función de diferencia aditiva, para determinar la dominancia de una alternativa sobre otra. Dicha función es formalmente análoga a la función definida por *Kahneman y Tversky*.

Lo que realiza el método, es prescribir una acción a través de una priorización de todas las alternativas. El riesgo asociado a cada alternativa, será un valor adimensional, en la medida en que no se privilegie un objetivo sobre los restantes; es decir, que se respeta la multidimensionalidad del problema de decisión.

Los riesgos parciales asociados a una alternativa determinada, pueden obtenerse fácilmente a partir de las preferencias de los expertos en el caso de criterios cualitativos o mediante los cálculos obtenidos con los criterios cuantitativos.

En conclusión, el método TODIM, además de fundamentarse en la teoría de los prospectos, posee recursos técnicos para minimizar la posibilidad de ocurrencia de la reversión del orden y permite el tratamiento multicriterio de un conjunto de acciones interdependientes (*<biblio>*), *elementos que no son usuales* en la mayoría de los métodos de apoyo multicriterio a la decisión.

El método TODIM se basa en una noción bastante parecida a la del flujo neto, en el sentido de Promethee.

## **TOMA DE DECISIONES MULTICRITERIO**

En el entorno del proceso de toma de decisiones multicriterio, son varios los elementos que intervienen y son considerados por los intervinientes o involucrados (analista, comitente, decisor, etc.) para elegir un curso de acción determinado. Estos elementos en su contexto original, no son reducibles a unidades comunes, al contrario de lo que ocurre por ejemplo, con el análisis beneficio-costos; por lo tanto requieren procedimientos diferentes de los utilizados en el análisis tradicional. "*Decision making*" se refiere al marco, a veces complejo, de los procesos que llevan a que una persona o un conjunto de personas acuerden e instrumenten uno o varios cursos de acción, para solucionar un problema o para lograr un objetivo.

## **TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution)**

También llamada Programación Compromiso, es una técnica de programación matemática utilizada originalmente en contextos continuos y que ha sido modificada para el análisis de problemas multicriterio de tipo discretos. Es utilizada para identificar soluciones que se encuentran lo más cerca posible a una solución ideal, aplicando para ello alguna medida de distancia. Las soluciones así identificadas, se denominan soluciones compromiso y constituyen el conjunto de compromiso.

Esta técnica está basada en el concepto de que una alternativa seleccionada, debe tener la distancia más corta posible hacia la solución ideal positiva y estar lo más lejos posible respecto de la solución ideal negativa. Fue desarrollada por *Hwang y Yon* en 1981, recibiendo posteriores aportes de *Zeleny* (1982), *Hall* (1989). Fue mejorada por los propios autores en 1987 y más tarde conjuntamente con *Lai y Liu*, en 1993.

Una solución ideal se define como una colección de niveles ideales (o de puntajes) en todos los atributos considerados, pudiendo suceder que tal solución normalmente sea inalcanzable o que sea no factible. Esta noción se basa en la idea de que el logro de tal meta, se encuentra en la racionalidad de la elección humana. El vector compuesto por los mejores valores del *j*-ésimo atributo respecto a todas las alternativas posibles, es quien recibe el nombre de solución ideal positiva. En contraposición, la solución ideal negativa estaría dada por el vector que contiene los peores puntajes alcanzables en los atributos.

De este modo puede ocurrir que una alternativa seleccionada desde el punto de vista de su más corta distancia respecto de la solución ideal positiva, deba competir con otra alternativa que se encuentra lo más lejos posible de la solución ideal negativa. Por ello, y a fin de definir la solución ideal, el método TOPSIS define un índice de similaridad (o de proximidad relativa) que se construye combinando la proximidad al ideal positivo y la lejanía respecto del ideal negativo.

El método se desarrolla en una serie de etapas: I) se normalizan los puntajes asignados a las diversas alternativas; II) luego se calculan los puntajes normalizados ponderados; III) se identifican o definen las soluciones, ideal positiva e ideal negativa del problema bajo análisis, en términos de los valores normalizados ponderados; IV) se calculan las medidas de separación o distancia a las soluciones ideales entre las alternativas, mediante alguna noción de distancia métrica, que puede ser la euclídea. Cualquiera sea la noción de distancia utilizada, esta se calcula respecto de la solución ideal positiva y respecto de la solución ideal negativa; V) Finalmente se construyen las semejanzas a la solución ideal positiva como índice, respecto de la solución ideal negativa, lo que implica que dicho índice combina los dos aspectos o metas definidos al principio.

El ordenamiento por preferencia de las soluciones surge de colocar las alternativas en orden decreciente respecto de las semejanzas estimadas en V) ya que el más alto valor representa aquella

alternativa que se encuentra más cerca del ideal positivo en relación con la distancia respecto del ideal negativo.

Cabe observar, que por el tipo de atributos bajo análisis (todos atributos deben medirse sobre escalas de intervalo) y por la heurística aplicada, el método TOPSIS es muy adecuado al tratamiento multicriterio de problemas que aparecen en los Sistemas de Información Geográfica.

## UTILIDAD MULTIATRIBUTO

Se trata de modelos de agregación de preferencias efectuadas respecto de criterios individuales, en los cuales se modelizan las preferencias globales del decisor mediante de una función de valor.

La teoría de la utilidad multiatributo desarrollada por Keeny y Raiffa (1976), a partir de la teoría de utilidad unidimensional de Von Neumann y Morgenstern (1944), busca expresar las preferencias del decisor sobre un conjunto de atributos o criterios, en términos de la utilidad que le reporta, dentro de un contexto de la teoría de la decisión, en condiciones de incertidumbre. El dogma central de comportamiento es el principio de racionalidad. Esta teoría, de inspiración anglosajona, se basa en los siguientes principios fundamentales:

(A 1) todo decisor intenta inconscientemente (o implícitamente) maximizar una función que agrega todos los puntos de vista relevantes del problema. Esto es, interrogado el decisor acerca de sus preferencias, sus respuestas serán coherentes con una cierta función, que no es conocida a priori. El papel del analista es el de estimar esta función, mediante una adecuada serie de preguntas formuladas al decisor.

(A 2) Por otra parte, todo par de acciones  $a$  y  $b$ , son susceptibles de ser comparadas, y existe un ordenamiento de preferencia bien definido sobre el conjunto de las acciones, de modo que para cualquier par de alternativas se tiene que:

o bien  $a > b$ , el resultado  $a$ , es preferido al resultado  $b$ ,

o bien  $a \sim b$ , el decisor se encuentra en situación de indiferencia entre  $a$  y  $b$ ,

o bien  $b > a$ , el resultado  $b$ , es preferido al resultado  $a$ .

(A 3) Se asume que el orden de preferencia es transitivo; esto es, si se prefiere  $a$  a  $b$  y  $b$  a  $c$ , entonces se debe preferir  $a$  a  $c$ .

Estos dos últimos axiomas garantizan la preservación de consistencia al comparar resultados. El propósito del método radica en asociar valores numéricos a los resultados de la comparación, de modo tal que I) estos valores numéricos son ordenados consistentemente con las preferencias, y II) se puedan determinar tales valores, mediante algún tipo de procedimiento, para el cual se recurre a axiomas adicionales.

La técnica se basa aquí en dos pasos: primero, la medición de la utilidad parcial de una alternativa con referencia a cada uno de los criterios, y luego, proceder a la agregación de estas utilidades parciales, para obtener la utilidad global de la acción bajo análisis.

En definitiva, las fases que se distinguen en la construcción de una función de utilidad son las siguientes:

- I) Identificación de la forma funcional apropiada
- II) Construcción de las funciones de utilidad unidimensionales
- III) Determinación de los parámetros de la función de utilidad multiatributo
- IV) Comprobación de la consistencia de la función de utilidad construida

Tanto para la determinación de la forma de descomposición, como para el cálculo de las funciones de utilidad unidimensionales y los factores de escala, se utilizan las técnicas de loterías o prospectos.

Este modelo se basa en los supuestos de que:

- Los diferentes atributos son independientes
- El beneficio o valor general que resulta de la presencia de distintos atributos, se obtiene de forma aditiva

A pesar de que el cumplimiento de estos supuestos, no siempre se puede garantizar, la repercusión que tiene la violación de los mismos (robustez del modelo) es débil. Es posible el planteo de otros modelos

de agregación de tipo multiplicativo, pero estos son más complejos y menos utilizados.

El modelo de agregación de las utilidades parciales, en una utilidad total, puede tomar dos formas, I) de tipo aditiva o II) de tipo multiplicativa.

En i) es posible agregar las utilidades parciales sumándolas las unas con las otras (luego de haberlas multiplicado por una ponderación, o luego de haberlas modificadas mediante una transformación afín, o ambas a la vez). En el llamado modelo aditivo simple la utilidad global se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$U(x) = p_1 u_1(x_{i1}) + p_2 u_2(x_{i2}) + \dots + p_m u_m(x_{im})$$

dónde los  $p_j$  son los pesos o ponderaciones, las  $u_j$  son las utilidades subjetivas parciales y las  $x_{ij}$  son las acciones bajo análisis.