UNIVERSIDAD ESTATAL A DISTANCIA
VICERRECTORÍA ACADÉMICA
SISTEMA DE ESTUDIOS DE POSGRADO
PROGRAMA DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN

EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO LÓGICO-MATEMÁTICO EN LOS ESTUDIANTES COSTARRICENSES DE UNDÉCIMO AÑO DE COLEGIOS ACADÉMICOS DIURNOS Y SU NIVEL DE LOGRO EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

Tesis de graduación sometida a la consideración del Tribunal Examinador
del Programa de Doctorado en Educación para optar por el grado de

DOCTOR EN EDUCACIÓN

por

GUILLERMO VARGAS SALAZAR

San José, Costa Rica
2013

TRIBUNAL EXAMINADOR

Esta tesis fue aprobada y aceptada por el Tribunal Examinador del Programa de Doctorado en Educación de la Universidad Estatal a Distancia (UNED), como requisito parcial para optar al grado de Doctora en Educación.

Dr. Víctor Hugo Fallas Araya
Sistema de Estudios de Posgrado

Dra. Jenny Seas Tencio
Doctorado en Educación

Dr. Juan Carlos Quirós Loría
Representante Escuela de Educación

Dr. Juan Manuel Esquivel Alfaro
Director de Tesis

Dr. Gilberto Alfaro Varela
Lector de Tesis

Dr. Edwin Chaves Esquivel
Lector de Tesis

Tesis defendida por:

Guillermo Vargas Salazar

Solamente por sencillez en el estilo, este documento utiliza un lenguaje que no contempla las diferencias de género. La posición del investigador es clara y firme: toda discriminación de esta o de cualquier otra naturaleza, se considera odiosa e incongruente con los principios y propósitos que este documento entraña.

DEDICATORIA

A Flor de María
Carmen Eugenia y
Guillermo Emmanuel;
amores, ilusión, sentido y
cimiento inefables de mi vida.

GRATITUD

Gracias al Padre Omnisciente quien bendijo mi vida con el don inefable de ser educador.

Gracias a mis padres, maestros, fuente prístina en que bebí la pasión gozosa por la educación. Gracias a mi esposa, educadora, compañera generosa e inspiradora en nuestra entusiasta tarea en esas aulas en donde nos encontramos y unimos nuestras vidas.

Gracias a mis cientos de estudiantes con quienes viví y disfruté, por décadas, la maravillosa aventura de hurgar por los senderos feraces de las Matemáticas, construir juntos estructuras de conocimientos y –en inolvidables momentos de comunión de anhelos, de alegrías y de algunos fragmentos de pesadumbre– forjar afectos filiales permanentes que ornan hoy el camino de mi vida.

TABLA DE CONTENIDOS

LISTA DE CUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS

ANOVA:	Analysis of variance
CIMM	Centro de investigaciones matemáticas y meta matemáticas
DPLM:	Desarrollo del pensamiento lógico-matemático
LISREL:	Programa Linear Structural Relations
MEP:	Ministerio de Educación Pública
NLAM:	Nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas
PLM:	Pensamiento lógico-matemático
RMSEA:	Root Mean Square Error of Approximation
SEM:	Structural Equation Models
SPSS:	Statistical Package for the Social Sciences

SÍNTESIS

El propósito de este estudio fue aportar evidencia empírica en torno a la relación entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático en los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios costarricenses académicos diurnos y su nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas, consideradas éstas en sus áreas de conocimiento algebraica y geométrica; así como determinar si las diferencias entre la ubicación del colegio –urbano o rural– y el sexo del estudiante moderan la relación entre el desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico-matemático y el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas.

La investigación se realizó con una muestra de 485 estudiantes pertenecientes a 20 colegios localizados en 12 Direcciones Regionales de Educación y en todas las 6 regiones socioeconómicas en que se separa el país. Atendiendo a una similar distribución nacional, en la muestra el 39% de los estudiantes provenían de zona rural, el 51,1% fueron varones.

Se emplearon en el estudio dos test, uno basado en referentes internacionales para evaluar el desarrollo del pensamiento lógico-matemático en las 6 escalas de Shatnawi y otro correspondiente a las pruebas nacionales de bachillerato para evaluar el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas, en las áreas de conocimiento de Álgebra y Geometría.

El análisis de los resultados de la investigación evidenció un pobre nivel de desarrollo del pensamiento lógico-matemático, significativamente distanciado para estudiantes de último año de Educación Media, de los parámetros internacionalmente aceptados. Las escalas de razonamiento lógico y demostración matemática fueron las que mostraron mayor grado de dificultad. Por su parte el nivel de logro en el aprendizaje del Álgebra y Geometría también fue claramente insuficiente.

El estudio mostró la clara existencia de una relación significativa entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático de los estudiantes –tanto globalmente considerado como para cada una de las escalas: generalización, inducción, deducción, uso de símbolos y de lenguaje matemático, razonamiento lógico y demostración matemática –y su nivel de logro en el aprendizaje de Matemáticas en las áreas de conocimiento de Álgebra y Geometría. Las escalas que mostraron los más altos grados de relación fueron "razonamiento lógico" y "demostración matemática" para Geometría, y "uso de símbolos y lenguaje matemático" y "generalización" para Álgebra

El sexo y su zona de procedencia no mostraron tener una relación significativa ni con el desarrollo del pensamiento lógico ni con el éxito en el aprendizaje de Geometría o del Álgebra.

ABSTRACT

The first aim of this study was to identify and provide empirical evidence about the relationship between the development of mathematical thinking in eleventh grade Costa Rican students and their mathematical achievement, particularly in the areas of Algebra and Geometry. The second aim was to examine possible gender and school location (urban or rural) differences related to mathematical thinking and mathematics achievement in the particular areas of Algebra and Geometry.

The research was conducted with a sample of 485 students from 20 different schools located in 12 educational regions and distributed in all the 6 socio-economic regions in which the country is divided. On the other hand, with a structure similar to the national pattern of distribution, in the sample 39% of the students came from rural areas and 51.1% were males.

In this study two tests were used, one based on international benchmarks for assessing the development of logical-mathematical thinking, in its 6 Shatnawi scales, and another corresponding to the national high school test to assess the level of achievement in Math learning in the areas of knowledge of Algebra and Geometry.

The study clearly showed the existence of a significant relationship between the development of logical-mathematical thinking – both globally considered or for each of its 6 Shatnawi scales - generalization, induction, deduction, using symbols and mathematical language, logical reasoning and mathematical proof - with their level of achievement in mathematics learning in the areas of knowledge of Algebra and Geometry. The thinking scales that showed the highest levels of association were "logical reasoning" and "mathematical proof" for Geometry, while "use of symbols and mathematical language" and "generalization" for Algebra.

“Gender” and the “students area of origin” showed not to have a significant relationship with either the development of logical thinking or the learning achievement of Geometry or Algebra.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

PALABRAS PRELIMINARES

Un tiempo como el nuestro, signado por una vertiginosa aceleración del cambio, por una transformación científico-tecnológica inédita en sus alcances y por el desafío de una emergente sociedad del conocimiento, exige una Educación de excelencia que dote a los hombres y a las mujeres de la formación requerida para una mejor comprensión global de la época, para un aprovechamiento cabal de las múltiples oportunidades que esta ofrece y para crearse un seguro blindaje contra las diversas amenazas que entraña.

Como siempre, pero más que antes, la Educación constituye hoy una poderosa fuerza de transformación que contribuye de manera decisiva a la configuración en las personas de una estructura cognitiva que –a la vez que permite la aprehensión y empleo de conocimientos teóricos y prácticos– facilita la convivencia armónica, una fuerza que es crucial en el mejoramiento de las condiciones de vida de los hombres y los pueblos, que sienta las bases para un desarrollo integral y sostenible y que es hoy indispensable para minimizar las circunstancias adversas que entrañan la globalización y la mucha veces inmisericorde competencia internacional.

Esa Educación de excelencia que exige nuestro tiempo ha de ser, como señala Savater (2004), "*entre otras cosas, pero muy principalmente, educación para la razón, pues educación es formar seres humanos y los seres humanos somos ante todo racionales*" (p. 8). De allí se colige que hoy el esfuerzo educativo fundamental –contrario a la simple acumulación de información– debe estar dirigido a potenciar la capacidad de conocimiento, de razonamiento autónomo y creativo; la capacidad de ordenar, de relacionar, de criticar, de discernir y, finalmente, de apropiarse de las facultades necesarias para continuar por uno mismo el aprendizaje.

Si bien este ejercicio de potenciar la razón se puede realizar desde los más diversos ámbitos del conocimiento humano –pues no en vano una de las principales misiones de la razón es establecer los diversos campos de verdad que existen– no es menos cierto que las Ciencias, y en particular las Matemáticas, constituyen un campo especialmente feraz en donde la acción educativa puede hacer germinar con singular vigor esa función racional que, aunque posibilitada por unas capacidades naturales, no puede entenderse como algo simplemente instintivo ni automático ni tampoco puede confundirse con la mera información.

De esta forma, en el contexto de este gran desafío de nuestro tiempo, el aprendizaje de las Matemáticas se constituye hoy en uno de los pilares fundamentales de esa sólida formación que las circunstancias reclaman y en un instrumento privilegiado para el desarrollo pleno del ser humano pues, como bien afirma A.N Whitehead (1923), citado por Dou (1998), "*si la civilización continúa avanzando con el ritmo que hoy lleva, en las próximas décadas la novedad predominante en el pensamiento humano será, sin duda, el señorío de la intelección matemática*" (p. 43).

Vivimos un mundo altamente "matematizado" en que lidiamos permanentemente con desafíos matemáticos a pesar de la frecuente invisibilidad de la mayoría de ellos en nuestras vidas. Por ello, es claro que las competencias matemáticas constituyen elementos fundamentales en el esfuerzo por alcanzar una acción social exitosa de las personas insertas en el desafiante contexto de la emergente sociedad del conocimiento, en la globalización económica y en la mundialización cultural. En esta vorágine de cambio, las competencias matemáticas, sin duda, contribuyen a que los hombres y las mujeres puedan con mayor acierto describir, interpretar, intervenir, evaluar y optimizar su empeño en la realización de su proyecto de vida personal y su participación en la sociedad.

Pero aprender Matemáticas significa construir Matemáticas. El quehacer matemático es esencialmente un proceso constructivo. No se aprende Matemáticas absorbiendo pasivamente conceptos y definiciones o, peor aún, resolviendo mecánicamente extensas listas de ejercicios con adhesión de autómata a algoritmos obtenidos mediante un inexplicado sortilegio. El auténtico aprendizaje de las Matemáticas exige, para quien lo intenta, una construcción fundada en su propio esfuerzo intelectual y en el empleo insoslayable y diestro del pensamiento lógico-matemático. Por ello, matemáticos de la estatura de Miguel de Guzmán (2006), señalan enfáticamente que "*La tendencia general más importante y difundida hoy en*

Educación Matemática consiste en el hincapié que ha de hacerse en la transmisión de los procesos de pensamiento propios de la Matemática más que en la mera transferencia de contenidos” (p. 23).

Sin embargo, la atención a esta tendencia prioritaria que ha de caracterizar hoy la enseñanza de las Matemáticas no debe entenderse como un abandono de la responsabilidad docente de cuidar y cultivar la intuición en general o la manipulación operativa del espacio y de los mismos símbolos. Si bien es preciso atender con singular esmero la comprensión e inteligencia de lo que se hace, no por ello se ha de permitir que este esfuerzo por entender, por generalizar, deducir, inducir y abstraer traslade a segundo plano los contenidos intuitivos de nuestra mente en su acercamiento creativo a los objetos matemáticos.

En suma, el empeño y las acciones tendientes a responder hoy, desde el ámbito de la enseñanza de las Matemáticas, a las crecientes exigencias de nuestro tiempo han de orientarse por el principio fundamental de que ***conocer es saber hacer comprendiendo las razones***.

El cumplimiento de esta tarea entraña, naturalmente, modificaciones sustantivas en el diseño y en la ejecución de las estrategias didácticas, para lograr que los estudiantes alcancen un aprendizaje fecundo de las Matemáticas privilegiando, para este fin, los procesos de construcción cognitiva y reconociendo en los educandos a los sujetos del aprendizaje que, como conocedores activos, deben estar en capacidad de esculpir su propio conocimiento, llevando en su mano el cincel del pensamiento lógico-matemático.

Sin embargo, frente a este desafío, uno de los más graves escollos en que hoy tropieza la Educación en general y la Educación Matemática en particular, es la tendencia de los docentes a establecer como su objetivo prioritario que los estudiantes “*sepan hacer*”, lo cual equivale a afirmar que la prioridad del docente se fija en objetivos procedimentales que descuidan los objetivos declarativos y estropean con ello, muchas veces en forma irremisible, el potencial cognitivo del estudiante.

A esta conclusión, precisamente, llegaron los especialistas reunidos en 1995 en el "V Simposio Costarricense sobre Matemáticas, Ciencias y Sociedad" - recogida el Centro de investigaciones matemáticas y metamatemáticas, CIMM – cuando refiriéndose a la enseñanza de las Matemáticas en Educación Media en Costa Rica afirmaron que:

> *Adicionado a la poca cantidad de contenidos matemáticos que se imparten, está el serio agravante de la forma en cómo éstos se enseñan que, en general es memorística, exigiendo sólo aprendizaje mecánico de fórmulas, procedimientos y lenguaje de forma poco motivadora y sin hacer referencia a estrategias en las que el alumno pueda construir conceptos, obtener y comprender resultados y realmente aprehenderlos y utilizarlos para resolver problemas, más hacer que pensar*" (La Educación Matemática en Costa Rica, ideas y recomendaciones. Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática, 2007, Año 2, N°3, pp. 189-197).

Este problema, tan claramente descrito en el párrafo anterior por los especialistas costarricenses en Educación Matemática, no es sin duda exclusivo de este país, pero su magnitud en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Media en Costa Rica es de tal magnitud, que bien se podría decirse – parafraseando la tan conocida y suprema ironía de Jean le Rond d'Alembert – que el principio básico que guía la acción de un alto número de profesores costarricenses de Matemáticas es: "*seguid haciendo, el conocimiento vendrá después*".

Seymour Papert (1981), citado por Serrano (2008), se preguntaba si a los alumnos a los que se les enseñó Álgebra durante un primer curso aprendían mejor la Geometría del curso siguiente que aquellos que durante ese primer curso se limitaron a hacer gimnasia. Ante la respuesta negativa a esta pregunta se planteaba entonces una nueva cuestión: *"¿cabe identificar y enseñar algo distinto del Álgebra o de la Geometría y que, una vez aprendido, facilite el aprendizaje del Álgebra o de la Geometría?, ¿Hay que 'enseñar Matemáticas' a nuestros estudiantes o hay que hacer que 'piensen matemáticamente?"*

En esa línea de pensamiento se orientó esta investigación. ¿Se enseña Matemáticas a nuestros estudiantes o se está logrando que piensen matemáticamente'? El interés de este estudio fue auscultar en la realidad costarricense el desarrollo de las capacidades de pensamiento lógico-matemático de nuestros estudiantes de undécimo año de Educación Media – prontos a enfrentar el reto de la Educación Superior – y su correlación con el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en sus vertientes algebraica y geométrica. ¿Se está aprovechando la riqueza que ofrece el estudio de las Matemáticas para potenciar en nuestros estudiantes la capacidad de razón, como pareciera ser el mandato singular de nuestros tiempos?; ¿se está favoreciendo el auténtico aprendizaje de las Matemáticas con el cultivo en nuestros estudiantes de un robusto pensamiento lógico-matemático?; ¿se está ubicando en el lugar de privilegio que insinúa Papert al desarrollo de las capacidades del pensamiento lógico-matemático de los estudiantes?; ¿se está, en suma, atendiendo desde el ámbito de la Educación Matemática el urgente llamado que entraña el desafío de nuestra época?

Al haber situado este estudio en el ámbito de la investigación en Educación Matemática el trabajo se adentró en un campo que, pese a su trascendencia, sólo en tiempos muy recientes ha logrado consolidarse como un área de más frecuente incursión fecunda de investigadores y de impactos significativos en su vertiente práctica. Entre otras circunstancias, ha sido la evidencia de la creciente pauperización de la comprensión matemática de los estudiantes costarricenses lo que ha impulsado con mayor fuerza la tarea de hurgar científicamente en las condiciones que caracterizan la Educación Matemática en Costa Rica para ofrecer opciones de transformación curricular que – lejos de la alternativa facilista que ha enamorado a tantos con su trágico espejismo – procuren una robusta formación matemática, un empoderamiento activo del pensamiento lógico-matemático y un sólido y genuino éxito académico de los estudiantes.

Esta circunstancia de empobrecimiento de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Media en Costa Rica se ha tornado hoy muy compleja y así fue claramente señalado por los docentes y los especialistas en Educación Matemática, reunidos en 1995 el "V Simposio de Matemáticas, Ciencia y Sociedad", cuando afirmaron que en nuestro país vivía:

un empobrecimiento de los aprendizajes de las Matemáticas, entendido como un fenómeno multicausal en el que se destacan: la inexistencia de políticas institucionales para el desarrollo de las Matemáticas y su enseñanza en los niveles primario y secundario; la inexistencia de una política coherente para la capacitación de los profesores en servicio; la producción inadecuada de materiales dirigidos al uso de los estudiantes, profesores y maestros que no les permitan desempeñar sus labores docentes de una manera más eficiente y más provechosa para los estudiantes; un recurso humano profesional para la enseñanza de las Matemáticas insuficiente tanto en cantidad como en calidad. (Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática, 2007, Año2, N°3, pp. 189-197)

En este mismo encuentro de especialistas costarricenses en Educación Matemática se concluyó que la insuficiente calidad de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Educación Media en Costa Rica se debe, en gran medida, a que un alto porcentaje de las personas que ejercen la docencia,

no tienen título universitario que los acredite para un ejercicio adecuado e incluso algunos, en zonas rurales, ni siquiera han tenido un contacto con las Matemáticas más allá de lo que hicieron en los estudios secundarios, por lo que en su trabajo como profesores incluyen muchos errores que se van propagando con las consiguientes dificultades posteriores para desterrarlos. (Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática, 2007, Año2, N°3, pp. 189-197)

Circunstancia esta última que se agrava – según lo que concluyeron los especialistas participantes en el ya mencionado "V Simposio de Matemáticas, Ciencia y Sociedad"– con la significativa y continua disminución de los contenidos que se estudian pues, según ellos, un problema central consiste en que los que se imparten son "*unos contenidos mínimos que cada vez son más mínimos*" [sic] (Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática, 2007, Año2, N°3, pp. 189-197)

La ruta propuesta

Emprender una tarea, comprometerse racionalmente en un esfuerzo entraña necesariamente dibujar una meta, fijar un derrotero y delinear el camino que se ha de seguir para alcanzarlo. Un trabajo de investigación, como toda otra tarea humana racionalmente ideada, exige decantar el objetivo fundamental que determinará la ruta y encauzar por ella todas las acciones.

Para este estudio, los propósitos que perfilaron el camino y que, con ello, orientaron todas las tareas fueron: por una parte, aportar evidencia empírica acerca de la relación entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático en los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios costarricenses académicos diurnos y su nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas, consideradas estas en sus áreas de conocimiento algebraico y geométrico y, por otra parte, determinar si las diferencias entre la ubicación del colegio –urbano o rural– y el sexo del estudiante moderan la relación entre el desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico-matemático y el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas.

PROBLEMAS DE LA INVESTIGACIÓN

Con el afán de presentar los objetivos de esta investigación en una forma más directa, intentar expresarlos con una mayor y más clara delimitación, visualizar de mejor forma las variadas actividades de estudio y de análisis que se realizaron para alcanzarlos y, además, – según lo que recomiendan para este efecti Shelltiz et al. (1980) – procurar "*minimizar las distorsiones*" que pudiesen presentarse, en esta sección se enuncian, en forma de interrogantes – problema y subproblemas – los elementos esenciales que constituyeron el propósito general y los propósitos específicos que planteó este estudio.

PROBLEMA

¿Están relacionados el desarrollo del pensamiento lógico-matemático en los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos – considerado este en sus escalas fundamentales de generalización, inducción, deducción, uso de símbolos y de lenguaje matemático, razonamiento lógico y demostración matemática – con su nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas, consideradas éstas en sus áreas de conocimiento algebraica y geométrica?

SUBPROBLEMAS

Con esta investigación se pretendió hallar respuesta a las siguientes interrogantes:

- ¿Existe diferencia en el grado de desarrollo del pensamiento lógico-matemático – tanto globalmente considerado como para cada una de sus escalas fundamentales – entre los estudiantes de undécimo año procedentes de zona rurales y los estudiantes provenientes de zonas urbanas?

- ¿Existe diferencia en el grado de desarrollo del pensamiento lógico-matemático – tanto globalmente considerado como para cada una de sus escalas fundamentales – entre las estudiantes mujeres y los estudiantes varones de undécimo año de los colegios académicos diurnos?

- ¿Existe diferencia en el nivel de logro en el aprendizaje de Matemáticas – tanto del área de conocimientos de Geometría como en el área de conocimientos de Álgebra – entre los estudiantes de undécimo año de colegios académicos diurnos provenientes de zonas rurales y los estudiantes provenientes de zonas urbanas?

- ¿Existe diferencia en el nivel de logro en el aprendizaje de Matemáticas – tanto del área de conocimientos de Geometría como en el área de conocimientos de

Álgebra – entre las estudiantes mujeres y los estudiantes varones de undécimo año de los colegios académicos diurnos?

- ¿Cuál es la relación entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático de los estudiantes de undécimo año de los colegios costarricenses académicos diurnos – tanto globalmente considerado como para cada una de las escalas de Shatnawi – con su nivel de logro en el aprendizaje de Matemáticas tanto en el área de conocimiento de Geometría como en el área de conocimiento de Álgebra?

- ¿Existe relación entre el nivel de logro alcanzado por los estudiantes en el aprendizaje de la Geometría con su zona de procedencia, su sexo y su grado de desarrollo del pensamiento lógico-matemático, considerado éste tanto globalmente como según cada una de las seis escalas fundamentales que lo constituyen?

- ¿Existe relación entre el nivel de logro alcanzado por los estudiantes en el aprendizaje del Álgebra con su zona de procedencia, su sexo y su grado de desarrollo del pensamiento lógico-matemático, considerado éste tanto globalmente como según cada una de las seis escalas fundamentales que lo constituyen?

- ¿Existe relación entre el nivel de logro alcanzado por los estudiantes en el aprendizaje de las Matemáticas, integrando las dos áreas de Geometría y de Álgebra con su zona de procedencia, su sexo y su grado de desarrollo del pensamiento lógico-matemático globalmente considerado?

JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Decantados y enunciados los propósitos que pretende lograr una investigación, corresponde – como tarea simultánea e insoslayable – definir las razones que sustentan y justifican la realización de ese esfuerzo académico.

En el caso de este estudio, las razones y los beneficios que se consideró que se podrían derivarse de él expresaron teniendo como referentes los cinco criterios de evaluación que señalan Hernández et al. (2006) para determinar la importancia potencial de una investigación, a saber**:** conveniencia, relevancia social, implicaciones prácticas, valor teórico y utilidad metodológica.

El esfuerzo por asir la esencia y la estructura de entes matemáticos que no se revelan en forma directa e inmediata; la exigencia que implica avanzar en el estudio y la comprensión de las Matemáticas tanto en su contenido algebraico como geométrico; el desafío de estar cada vez más obligados a alejarse del referente de la experiencia sensible y, muy particularmente, la tarea de construir "el concreto del pensamiento" por la vía del correcto razonar suelen generar en muchos estudiantes de Educación Diversificada un sentimiento de desconcierto y de inseguridad ante el desafío de avanzar en la aprehensión de los conocimientos algebraicos y geométricos con el apoyo de un uso certero del pensamiento lógico-matemático.

Esta situación que suelen vivir muchos de estos estudiantes conspira contra la calidad de los aprendizajes de las Matemáticas; deteriora la autoestima de los alumnos; estimula la deserción estudiantil y cohonesta la divulgación de una concepción errada y negativa de las Matemáticas.

Por estas circunstancias, se estimó de particular *conveniencia* – entendida ésta como utilidad o provecho – la realización de esta investigación, por cuanto los resultados del estudio sobre los alcances del desarrollo de las capacidades de pensamiento lógico-matemático de los estudiantes de último año de la Educación Diversificada, su nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en sus vertientes geométrica y algebraica y las posibles correlaciones existentes entre ellas podrían aportar a las autoridades académicas y a los docentes evidencia empírica útil para determinar los elementos o capacidades de pensamiento lógico-matemático – medidos por las pruebas nacionales de Bachillerato – que más contribuyen a alcanzar altos niveles de logro en el aprendizaje de las Matemáticas. De esa forma, estos elementos o capacidades podrían ser privilegiados en los diseños curriculares y en la acción de aula de los docentes, con el fin de alcanzar un cambio sustantivo en el aprendizaje exitoso y significativo de la Matemáticas.

La *relevancia social* de este estudio, por su parte, se encontró directa e íntimamente relacionada con la relevancia social que tiene, "*per se*", el quehacer matemático y con el impacto que tiene una sólida formación matemática en los hombres y las mujeres que hoy se adentran en la emergente sociedad del conocimiento, ya que los resultados de la investigación se dirigieron precisamente a aportar evidencia que pudiese enriquecer las decisiones de transformación curricular y de "actitud de aula" tendientes a lograr una formación matemática más robusta y, con ella, una mayor posibilidad de inserción exitosa en las tareas sociales de construcción de una sociedad integralmente desarrollada.

Por otra parte, el estudio de las posibles correlaciones entre las circunstancias de sexo y de área geográfica de procedencia de los estudiantes, en relación con sus logros en el aprendizaje de las Matemáticas y con el desarrollo de sus capacidades de pensamiento lógico-matemático, proveyó información socialmente relevante en tanto que nutriente para la toma de decisiones, para minimizar las eventuales circunstancias de inequidad en razón de sexo o bien de condiciones socio-económicas derivadas de la procedencia rural o urbana de los estudiantes.

Para mayor abundamiento en el tema de la *relevancia social* de este estudio – en tanto que investigación en el ámbito de la Educación Matemática y esfuerzo por brindar elementos que favorezcan el mayor, más significativo y más exitoso aprendizaje de las Matemáticas de los estudiantes de Educación Media – recuérdese con Bermúdez de Castro (2009) cómo *"Las Matemáticas no sólo están detrás de muchas cosas, sino que vivimos en un mundo hipermatematizado que, en consecuencia, exige que la ciudadanía necesite más Matemáticas para ser más libre, es decir, para entender mejor y apropiarse de la compleja sociedad en la que vive"* (p. 12).

Cabe destacar, por otra parte, la importancia de las *implicaciones prácticas* que se estimó que podrían derivarse de los resultados de esta investigación y que se resumen en acciones conducentes a:

- Realizar posibles cambios curriculares que promuevan que los estudiantes se vayan apropiando del pensamiento lógico-matemático en forma más “natural”, como resultado de un trabajo doble de comprensión matemática y de vivencia ordenada y constante de un conjunto estructurado de procesos mentales de análisis y razonamiento que, enmarcados en la lógica-matemática, constituyan el fundamento inmediato de la metodología deductiva.

- Incorporar estrategias docentes que enfaticen el empleo enriquecido del pensamiento lógico-matemático como instrumento para promover una mejor comprensión y aprehensión de los temas algebraicos y geométricos, con la consecuente reducción del frecuente desánimo e incertidumbre que viven los jóvenes al enfrentar el estudio de las Matemáticas y que, no pocas veces, es razón de fracaso escolar y de deserción del sistema educativo.

- Fortalecer en los profesores de Matemáticas de Educación Media la conciencia del valor formativo que esta tiene, de su trascendencia en el estudio de las Matemáticas como medio de construcción y empoderamiento de una estructura de pensamiento lógico-matemático y, consecuentemente, de la necesidad de esmerarse e innovar en las estrategias didácticas y enfoques teóricos que potencien el efecto benéfico de ella.

- Aportar evidencia que promueva la adopción de definiciones curriculares y de “estrategias de aula” conducentes a una más pronta y mayor apropiación de los elementos esenciales del pensamiento lógico-matemático, de forma tal que los estudiantes adquieran una mayor seguridad y confianza en sus estudios y, consecuentemente, vivan más prontamente una experiencia académica matemática más exitosa, de mayor satisfacción, disfrute y de estímulo a su autoestima.

- Establecer posibles acciones que promuevan condiciones de equidad curricular entre los estudiantes de colegios urbanos y colegios rurales en torno a los estímulos que les brinda la Educación Media para el cabal desarrollo de sus capacidades de pensamiento lógico-matemático y de aprendizaje significativo de las Matemáticas.

- Dilucidar las semejanzas y diferencias entre las mujeres y los hombres estudiantes de Undécimo Año en relación con el desarrollo de sus capacidades de pensamientos lógico-matemático y sus niveles del logro en el aprendizaje de las Matemáticas, con la consecuente implicación práctica de atención docente diversa, de estímulo a la autoestima y de negación científica de posibles prejuicios derivados de una visión distorsionada del sexo de los estudiantes.

Por otra parte, se estimó que los resultados de esta investigación – enmarcada en el ámbito de la enseñanza de las Matemáticas en la Educación Diversificada – tendría, además, un particular *valor teórico* pues sus conclusiones podrían significar un importante impulso para realizar la tarea posterior de "problematizar" la enseñanza del Pensamiento Lógico-Matemático, generar nuevas hipótesis de su potencial formativo, profundizar en el análisis de los procesos que en él dan lugar a la construcción de conocimientos; determinar cómo se valida curricularmente su impacto, cómo se trata con los estudiantes de este ciclo educativo la construcción de teorías y cómo se avanza en la apropiación del método axiomático.

Finalmente, en el ámbito de su *utilidad metodológica* se consideró que los resultados de esta investigación podrían promover el diseño de innovadoras estrategias didácticas que privilegiasen el potencial del pensamiento lógico-matemático, estimulasen el ejercicio sistemático del "correcto razonar", y ampliasen la visión de los contenidos geométricos y algebraicos con una perspectiva integral que los vincula en la construcción de la estructura matemática.

No menos importante, como corolario de esta posible innovación, se consideró el valor de una más clara aceptación de los estudiantes como actores activos del aprendizaje, empoderados por el conocimiento y uso de los procedimientos constitutivos del "correcto razonar" y distantes de la acumulación pasiva de conceptos, definiciones y algoritmos. Este efecto, por supuesto, se esperó que trajera consigo un poderoso cambio de actitud que permitiera desterrar el fantasma de la inaccesibilidad de las Matemáticas y, en su lugar, diera espacio para que estudiantes y docentes pudiesen participar genuinamente el gozo de compartir la hermosa aventura de la construcción y el aprendizaje de las Matemáticas.

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

OBJETIVO GENERAL

El propósito de este estudio fue aportar evidencia empírica acerca de la relación entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático en los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos – considerado éste en sus escalas fundamentales de generalización, inducción, deducción, uso de símbolos y de lenguaje matemático, razonamiento lógico y demostración matemática – y su nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas, consideradas éstas en sus áreas de conocimiento algebraica y geométrica.

El estudio se propuso, además, determinar si las diferencias entre la zona de ubicación del colegio – urbano o rural – y el sexo del estudiante moderaban la relación entre el desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico-matemático y el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas.

HIPÓTESIS

Las hipótesis, que se plantearon en este estudio como instrumentos de investigación, se enunciaron como las siguientes oraciones declarativas:

- El desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico-matemático – tanto integralmente considerado como en cada una de las seis escalas de: generalización, inducción, deducción, uso de símbolos y de lenguaje matemático, razonamiento lógico y demostración matemática – difiere entre los estudiantes de undécimo año de colegios académicos diurnos que provienen de zonas urbanas y los que provienen de zonas rurales.

- El desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico-matemático – tanto integralmente considerado como en cada una de las seis escalas de: generalización, inducción, deducción, uso de símbolos y de lenguaje matemático, razonamiento lógico y demostración matemática – no difiere entre los estudiantes de undécimo año de colegios académicos diurnos sean éstos mujeres u hombres.

- El nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en las áreas de conocimientos de Álgebra y de Geometría difiere entre los estudiantes de undécimo año de colegios académicos diurnos que provienen de zonas urbanas y los que provienen de zonas rurales.

- El nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en las áreas de conocimientos de Álgebra y de Geometría no difiere entre los estudiantes de undécimo año de colegios académicos diurnos sean éstos mujeres u hombres.

- El nivel de logro en el aprendizaje de Matemáticas – en el área de conocimiento de la Geometría – alcanzado por los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos se encuentra relacionado con su desarrollo del pensamiento lógico-matemático, tanto globalmente considerado como para cada una de las escalas: generalización, inducción, deducción, uso de símbolos y de lenguaje matemático, razonamiento lógico y demostración matemática.

- El nivel de logro en el aprendizaje de Matemáticas – en el área de conocimiento del Álgebra – alcanzado por los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos se encuentra relacionado con su grado de desarrollo del pensamiento lógico-matemático, tanto globalmente considerado como para cada una de las escalas: generalización, inducción, deducción, uso de símbolos y de lenguaje matemático, razonamiento lógico y demostración matemática.

- El nivel de logro en el aprendizaje de la Geometría alcanzado por los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos se encuentra relacionado con el conjunto de variables conformado por sexo del estudiante, su procedencia rural o urbana y su grado de desarrollo del pensamiento lógico-matemático globalmente considerado.

- El nivel de logro en el aprendizaje de la Geometría alcanzado por los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos se encuentra relacionado con el conjunto de variables conformado por el sexo del estudiante, su zona de procedencia rural o urbana y su grado de desarrollo del pensamiento lógico-matemático considerado en cada una de las seis escalas de Shatnawi: generalización, deducción, inducción, uso de símbolos y lenguaje matemático, razonamiento lógico y demostración matemática.

- El nivel de logro en el aprendizaje del Álgebra alcanzado por los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos está relacionado con el conjunto de variables conformado por el sexo del estudiante, su zona de procedencia rural o urbana y su grado de desarrollo del pensamiento lógico-matemático globalmente considerado.

- El nivel de logro en el aprendizaje del Álgebra alcanzado por los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos está relacionado con el conjunto de variables conformado por el sexo del estudiante, su zona procedencia rural o urbana y su grado de desarrollo del pensamiento lógico-matemático considerado en cada una de las seis escalas de Shatnawi: generalización, deducción, inducción, uso de símbolos y lenguaje matemático, razonamiento lógico y demostración matemática.

- El nivel de logro alcanzado por los estudiantes en el aprendizaje de las Matemáticas, integrando las dos áreas de Geometría y de Álgebra, está relacionado con el conjunto de variables conformado por el sexo del estudiante, su zona de procedencia y su grado de desarrollo del pensamiento lógico-matemático integralmente considerado.

VIABILIDAD, LIMITACIONES Y DELIMITACIONES

Esta investigación correspondió a un esfuerzo académico que, como todo trabajo humano, fue realizable en el marco de ciertas condiciones limitantes que fueron las que delinearon sus alcances, posibilidades y expectativas.

Las capacidades del investigador, la disponibilidad de recursos humanos, materiales y financieros; la capacidad de acceso a las fuentes de información; la disponibilidad y aceptación de los posibles informante; la naturaleza y característica del contexto en que se efectuó el estudio; el tiempo disponible; el conocimiento del problema y el número, diversidad y calidad de investigaciones previas que dieron sustento al trabajo, son algunos de los elementos que determinaron la viabilidad del estudio a la vez que dibujaron sus fronteras.

VIABILIDAD.

El estudio planteado fue factible en tanto que contó con la aceptación y expresa colaboración del Ministro de Educación Pública para realizar la investigación y su venia para la administración del instrumento de evaluación del desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico-matemático a los estudiantes de undécimo año que conformaron la muestra.

También se contó con la autorización del Ministerio de Educación para acceder a las hojas de respuesta del examen de Bachillerato en Matemáticas de la convocatoria ordinaria de esos mismos estudiantes, así como con la venia y el apoyo de la "División de gestión y evaluación de la calidad" – que es la unidad del Ministerio de Educación

Pública responsable de construir y administrar las pruebas de Bachillerato – para acceder e interpretar los resultados obtenidos por los estudiantes en esa prueba.

Por otra parte, también se contó con los recursos financieros necesarios, aunque claramente limitados, y con la disponibilidad de los materiales requeridos para recolectar e interpretar la información que se propuso obtener esta investigación.

LIMITACIONES

Las limitaciones más importantes que enfrentó esta investigación fueron:

- Por ser una investigación de carácter ex post facto fue muy complejo separar los efectos de las múltiples variables que intervienen.

- En tanto que investigación no-experimental, el estudio presentó como limitante natural y obvia la incapacidad de manipular variables independientes, la falta de poder para dar un carácter rigurosamente aleatorio en todos sus extremos y el riesgo de una interpretación menos certera que la que, eventualmente, podría haberse logrado con una investigación experimental.

- Los factores de tiempo y de recursos económicos también constituyeron limitantes de esta investigación pues, debido a que el estudio correspondió a una tesis de graduación el tiempo para llevarla a cabo fue limitado.

  Por otra parte, la realización de la investigación implicó un alto costo económico, por lo que fue preciso establecerle límites al estudio para ajustarlo a las posibilidades presupuestarias reales existentes; por esta razón fue necesario considerar únicamente los colegios públicos académicos diurnos, excluyendo los otros tipos de instituciones educativas que ofrecen estudios de undécimo año, e incluso establecer algunas limitantes a la conformación de la muestra.

DELIMITACIONES

Esta investigación – que se propuso determinar la relación entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático y el nivel de logro de esos estudiantes en el aprendizaje de las Matemáticas de los estudiantes costarricenses de undécimo año – se enfocó en seis elementos fundamentales del pensamiento lógico-matemático: generalización, inducción, deducción, uso de símbolos y de lenguaje matemático, razonamiento lógico y demostración matemática; en tanto que la relación de éstos con el aprendizaje de las Matemáticas se estudió específicamente en torno a las vertientes algebraica y geométrica de éstas.

Por otra parte, como ya fue dicho, la población en estudio se circunscribió a los estudiantes costarricenses que, en el año 2011, cursaron el undécimo año en colegios académicos públicos diurnos de educación formal.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

Todo trabajo de investigación, como toda obra humana, se apoya sobre la labor hecha por otros estudiosos, se fundamenta en trabajos de investigaciones anteriores, en análisis previos y en conceptos teóricos validados. No corresponde al investigador, ni tampoco le es posible, crear *ex nihilo* todo el marco que sustente su trabajo, su tarea será siempre ensanchar el camino que otros han abierto. Por ello, la mejor comprensión de un trabajo de investigación exige ofrecer una visión – que será siempre general – de los conceptos teóricos, las conclusiones e interpretaciones de estudios previos realizados por otros investigadores y los diversos componentes de las teorías sobre los que se asienta este esfuerzo. Este capítulo está destinado cumplir con ese objetivo.

LA NATURALEZA DE LAS MATEMÁTICAS

.

El filósofo y matemático inglés Bertrand Russell (1997) describió la naturaleza de las Matemáticas con una frase epigramática, por su brevedad, su precisión y su agudeza:

> *Las Matemáticas son aquella materia en la que no sabemos de qué estamos hablando, ni si lo que decimos es verdad*.

Con esta afirmación – no exenta de una ingeniosa veta satírico festiva – Russell invoca dos elementos esenciales de las Matemáticas: por una parte la abstracción, como elemento consustancial que emerge cuando nos dice "*no sabemos de que estamos hablando*" y, por otra parte, el carácter rigurosamente formal de la noción de verdad en Matemáticas que Russell evidencia cuando afirma que "*no sabemos si lo que decimos es verdad*", obviamente dicho esto en sentido fáctico.

Con un carácter más amplio y descriptivo de sus componentes fundamentales, los matemáticos Courant y Robbins (1996) dibujan, en la siguiente forma, los perfiles de la naturaleza de las Matemáticas:

> *La matemática, como expresión de la mente humana, refleja la voluntad activa, la razón contemplativa, la abstracción y el deseo de perfección estética. Sus elementos básicos son: la lógica y la intuición, el análisis y la construcción, la generalización y la particularidad. Aunque diversas perspectivas han destacado aspectos diferentes, es únicamente el juego de estas fuerzas opuestas y la lucha por su síntesis lo que constituye la vida, la utilidad y el supremo valor de la ciencia Matemática* (p. 3).

De esta forma, todo esfuerzo por delinear los rasgos fundamentales de la naturaleza de las Matemáticas necesariamente habrá de afirmar como matices esenciales: su carácter abstracto, su profundidad estética, su condición feraz para la creatividad libérrima, la intuición y la deducción como elementos consustanciales, la certeza de sus resultados, la importancia trascendental de sus aplicaciones, su singular universalidad en un sentido que no lo son otros campos del saber humano y su carácter de saber integrador de cara a un ejercicio de una ciudadanía crítica y responsable.

Con una incursión mayor en el proceso de apropiación del conocimiento matemático y con una visión puntual del origen de algunas de sus vertientes principales, De Guzmán (1993) ofrece una descripción de elementos sustantivos de la naturaleza de las Matemáticas cuando señala:

> *Las Matemáticas son una exploración de ciertas estructuras omnipresentes y más o menos complejas que aparecen en nuestra realidad y que admiten ese acercamiento racional, manipulable mediante símbolos, que pone en nuestras manos un cierto dominio de la realidad a que se refieren y que llamamos matematización. La Matemática se acerca a la multiplicidad de las cosas y crea la Aritmética, se aproxima a forma y se origina la Geometría, explora el propio símbolo surgido en la mente y nace el*

Álgebra, analiza los cambios y transformaciones en el espacio y en el tiempo y surge el Análisis Matemático (¶ 8)

En esta descripción de De Guzmán se destaca el señalamiento de la abstracción como elemento esencial de las Matemáticas y como condición que las hace universales en un sentido particular y distinto del que se halla en otros campos del pensamiento humano. La abstracción – entendida como el proceso de extraer la esencia subyacente de un concepto matemático, quitando cualquier dependencia de los objetos del mundo real con los que pudo haberse hallado ligada originalmente y generalizándola de forma que amplíe su uso – es ese proceso singular que Descartes en sus *Meditaciones Metafísicas*, citado por Halpern (1996), señala como propio y distintivo del pensamiento matemático en la siguiente clara afirmación:

> *Cuando imagino un triángulo, aún no existiendo acaso una tal figura en ningún lugar fuera de mi pensamiento, y aun cuando jamás la haya habido, no deja por ello de haber cierta naturaleza, o forma, o esencia de esa figura, la cual es inmutable y eterna, no ha sido inventada por mí y no depende en modo alguno de mi espíritu; y ello es patente porque pueden demostrarse diversas propiedades de dicho triángulo* (p. 63).

Para completar diciendo:

> *Y de nada valdría objetar en este punto que acaso dicha idea del triángulo haya entrado en mi espíritu por mediación de los sentidos, a causa de haber visto yo alguna vez cuerpo de figura triangular; puesto que yo puedo formar en mi espíritu infinidad de otras figuras, de las que no quepa sospechar ni lo más mínimo que hayan sido objeto de mis sentidos, y no por ello dejo de poder demostrar ciertas propiedades que atañen a su naturaleza* (p. 63).

Cabe señalar que este carácter eminentemente abstracto, que Descartes (1641) señala como distintivo de las Matemáticas, en ocasiones sesga erróneamente la percepción de la naturaleza de esta disciplina y, en consecuencia, la hace ver solamente como una suma de conocimientos analíticos sin tropiezos ni fisuras; sin falencias ni vacilaciones; como una ciencia diferente y enteramente ajena al mundo; como una realidad en sí misma; como un cuerpo independiente de verdades cuyos objetos son dados con el carácter de objetos del mundo real que los matemáticos meramente descubren junto con sus propiedades mediante el paradigma del pensamiento reflexivo, formal y axiomático; como una estricta construcción ideal que, pese a todas estas características – para estupor y sorpresa – es extraordinariamente eficaz para tratar ciertos tipos de problemas de modelización de los más diversos procesos de diferentes áreas del conocimiento y de la vida humanos.

Por ello, como elemento esencial en la descripción de la naturaleza de las Matemáticas, es preciso reafirmar con Bermúdez (2009), que esta disciplina ciertamente no es ajena a esa praxis humana que es más que una mera relación instrumental del hombre con la naturaleza, como tampoco es extraña a la experiencia física que – más que un simple registro de datos – constituye una construcción activa que deviene en asimilación a cuadros lógicos, matemáticos y espaciales que son el fruto de las acciones de la persona, de su praxis.

De esta forma, las Matemáticas tienen una naturaleza dual pues por una parte constituyen una disciplina independiente, que transita en un mundo de abstracciones, apreciada particularmente por su precisión y por su belleza intrínseca mientras que, por otra parte, conforman una rica fuente de instrumentos que son fundamentales en las aplicaciones prácticas de diferentes áreas del conocimiento.

Por otra parte, en cuanto al rigor y certeza de los resultados de las Matemáticas es importante destacar que, en general, se considera que hay una diferencia esencial entre la verdad de una afirmación matemática y la verdad alcanzada al interior de cualquier otra disciplina pues, sin duda, las verdades matemáticas están por encima de todas las limitaciones de verificación empírica que requieren la verdades científicas, están más allá de la subjetividad que suele teñir a las verdades de las ciencias sociales, poseen una claridad y transparencia muy superior a las verdades teologales y tienen una certeza y precisión a las que apenas se asoman los saberes técnicos. En suma, sólo las matemáticas ofrecen verdades que alcanzan el ideal de verdad absoluta.

La característica de permanencia que se otorga al conocimiento matemático es también una condición distintiva de la naturaleza de esta disciplina. Es bien sabido que las teorías científicas tienen una validez relativa, que de hecho con el tiempo sufren modificaciones e incluso llegan a ser contradichas e invalidadas. No sucede así con las verdades matemáticas cuya permanencia es condición de una singularidad que, como el teorema de Pitágoras o la infinitud de los números primos que fueron establecidos hace más de 2500 años, permanecen inalterables y parecen trascender del tiempo, el lugar y los diversos credos. En Matemáticas, a diferencia de la mayoría de las ciencias en las que una generación destruye lo edificado por otra y lo que ha establecido una lo deshace la otra, cada generación añade un nuevo piso a la estructura anterior debido a la firmeza de la construcción de las matemáticas.

Esta concepción de las verdades matemáticas, que ha prevalecido en todas las épocas de manera casi unánime, se debe a que para llegar a esas verdades, se parte de un conjunto de axiomas básicos que se aceptan como verdaderos y, por un proceso deductivo, se llega a ellas usando un razonamiento matemático empleado con una minuciosidad lógica tal, que el resultado es incontestable y convincente para todo el que lo entiende.

INTUICIÓN, CREATIVIDAD Y RACIOCINIO

En 1903, en la conferencia que dictó en la Sociedad Psicológica de París, decía el extraordinario matemático y filósofo de la ciencia Henri Poincaré:

> *Una demostración matemática no es una simple yuxtaposición de silogismos, sino silogismos colocados en determinado orden, siendo este orden de colocación mucho más importante que los elementos mismos. Si tengo la sensación, la intuición de ese orden, la capacidad que me permite adivinar armonías y relaciones ocultas entonces percibo sin más el razonamiento como un todo y no tengo ya que preocuparme de sus elementos, pues cada uno de ellos ocupará su parte en el elenco* (¶ 13) .

El pensamiento de Poincaré y su visión de la poderosa naturaleza de la intuición en la construcción y el aprendizaje de las Matemáticas pone en evidencia el valor, muchas veces sorprendente, que tiene en la creación y en el aprendizaje de las Matemáticas esta percepción íntima e instantánea de una idea o verdad que aparece como evidente para quien la tiene y que solemos llamar intuición.

De esta forma, si bien es cierto que la intuición es un tema controvertido – pues mientras algunos lo aceptan como fuente de conocimiento verdadero, otros lo rechazan como potencialmente engañoso en la búsqueda de la verdad – no es menos cierto que la intuición, que se caracteriza por exceder la información disponible y que, como señala Fischbein (1987), encuentra su nutriente básica en la experiencia acumulada, ha sido a lo largo de la historia una compañera que ha rendido no pocos y valiosos frutos en la construcción del conocimiento matemático.

Sin embargo en Matemáticas, al igual que en otras disciplinas, la maravillosa facultad de la intuición no basta para predecir y para alcanzar todos los resultados. Como es bien sabido, la sola intuición en no pocas ocasiones bien podría conducirnos a engaño, empujarnos al error. Por ello en los procesos de aprender, de enseñar y de construir Matemáticas (Dettmer, 1998) es preciso que, unidos al aporte intuitivo, también converjan y se encuentren presentes el raciocinio y el pensamiento lógico los que concurren, no sólo para brindar solidez y estabilidad a la construcción matemática – erigida con los materiales cognoscitivos que la experiencia y la intuición han aportado, sistematizándolos y organizándolos deductivamente – sino también para alcanzar, por vía deductiva, aquellos resultados que a la intuición por sí sola no le es posible.

La intuición – como concepto que implica el conocimiento directo e inmediato, sin intervención de la deducción, la inducción o el razonamiento – constituye quizá el más fascinante basamento de la creación y el quehacer matemáticos, sin embargo en el camino hacia la consecución de la verdad (Halpern, 1996) la intuición requiere necesariamente de una posterior “racionalización” para poder dar solidez y consistencia a sus descubrimientos.

Como natural corolario de estas circunstancias de la necesidad matemática del raciocinio y del pensamiento lógico que requiere la intuición para conformar el conocimiento, se sigue que el modelo lógico-matemático de deducción rigurosa – que nos fue legado por Euclides hace más de dos milenios – constituye para la construcción de los conocimientos matemáticos, así como para su enseñanza y aprendizaje, el camino privilegiado que permite arribar a resultados sólidos y verdaderos.

No en vano es por ello que los griegos, al empeñarse en realizar rigurosas demostraciones deductivas, son quienes primero "*hacen Matemáticas*" en sentido estricto y quienes dan paso a conceptos que hasta entonces habían permanecido sin ser discernidos con precisión: la abstracción, la generalización, la deducción, el análisis y la síntesis.

Es esta condición de raciocinio la que hace que la construcción matemática discurra por el cauce que traza el pensamiento lógico y que, como ha señalado Lakatos (1976), se estructure de forma tal que los conceptos de la Matemática aparezcan encadenados en una sucesión creciente de grados de abstracción, construyendo abstracción sobre abstracción, de forma tal que la construcción, la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas operan fundamentalmente en un campo de conceptos abstractos y de las múltiples interrelaciones que existen entre esos conceptos.

Como consecuencia, es claro que de la convergencia de la intuición, de la creatividad y del raciocinio es que surge vigoroso el conocimiento matemático siendo para ello de una importancia fundamental la aprehensión y el empleo del pensamiento lógico tanto en la construcción del conocimiento matemático como, muy especialmente, en la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina.

La importancia de esa aprehensión y de ese empleo cabal del pensamiento lógico en la enseñanza-aprendizaje se evidencia en la obligatoriedad de experimentar que conlleva esa tarea, como parte sustantiva del encuentro docente-estudiante, y la singular circunstancia de que experimentar en Matemáticas no es otra cosa sino construir razonamientos lógico-matemáticos; en el entendido de que, como señala Griffiths (1999), tanto en la construcción de las estructuras matemáticas como en su enseñanza y aprendizaje, "*ni el punto de partida ni el objeto de un estudio matemático son tan importantes como las pautas y la coherencia que emergen de él*" (p. 752).

PROLEGÓMENOS DEL PENSAMIENTO LÓGICO-MATEMÁTICO

Pensar, razonar es consustancial a la persona. Si exceptuamos los momentos del día en los nos vemos asaltados por corrientes mentales vanas y caóticas, o si excluimos los momentos de ensoñaciones y ensimismamientos podemos decir que nuestra vida transcurre diariamente entre tomas de decisiones ocurridas de manera voluntaria. (Dewey, 1989).

No nos es posible obviar la toma permanente de decisiones pues, como es bien sabido, aún cuando no se decida es obvio que ello implica que se ha decidido no decidir. Esta obligatoriedad permanente que, como imperativo de vida nos exige tomar decisiones, implica necesariamente una continua exigencia, igualmente inevitable y constante, de elaborar algoritmos, diseñar estrategias, plantear y resolver problemas, intentar eludir los fracasos, buscar vías de éxito, en síntesis: razonar, pensar.

Ahora bien, si como sabemos y hemos ya dicho, esta actividad es válida y permanente en nuestro quehacer cotidiano, más lo es y en forma particularmente singular cuando "*hacemos*", enseñamos o aprendemos Matemáticas.

En particular, el razonamiento presente en el caso de los procesos de enseñanza y aprendizaje se entiende como la ocasión en que el alumno alcanza "*conclusiones lógicas*" a partir de los datos de que dispone en torno a una situación o problema determinados, es decir, el razonamiento es la ocasión en la que el estudiante hace acopio de información, la organiza y la reelabora mediante operaciones cognitivas, establece relaciones entre los datos que comprende y construye sus conclusiones. (Crawford et al., 1998).

Lo fundamental en este proceso – dentro de los cauces de la lógica – según lo señala Moon (2006), es tanto la certidumbre de la comprobación de las conclusiones alcanzadas como la observación esmerada de determinadas reglas de relación entre las proposiciones conceptuales o factuales que garantizan la obtención de conclusiones iguales al establecer nuevamente esas mismas relaciones entre los elementos considerados. Considerando que estas relaciones, que entrañan operaciones formales, se cumplen entre objetos que pueden o no ser reales y se traducen – mediante un lenguaje simbólico que les es propio – a modelos que las generalizan y las representan y desde los que las situaciones de origen se obtienen por particularización.

De esta forma, la investigación sobre el desarrollo de las capacidades de pensamiento lógico-matemático y su impacto en el rendimiento en los estudiantes en Matemáticas – que es la cuestión central en esta investigación – exige revisar brevemente las características de su especificidad, pues el pensamiento y el conocimiento matemáticos tienen peculiaridades que deben ser especialmente consideradas, tanto para mejor comprender los mecanismos de su adquisición como para elaborar las estrategias más oportunas para su enseñanza y aprendizaje de forma tal que impacten positivamente y en mayor grado las posibilidades de éxito de los alumnos.

En este sentido es muy importante tomar en consideración, (Serrano, 2008), que en el aprendizaje de las Matemáticas lo real siempre se presenta ante el estudioso como un continuo que tiene que interpretar o al que tiene que conferir un significado, razón por la cual el sujeto del aprendizaje se ve necesariamente obligado a interactuar con el medio intentando descomponer y recomponer ese continuo a fin de conocerlo.

En este proceso de interacción con el medio, según señala Serrano (2008):

> *El sujeto sólo puede extraer información de dos elementos: la acción y el objeto. La información que el sujeto extrae del objeto recibe el nombre de "conocimiento físico" y la información que extrae de su acción sobre el objeto recibe el nombre de "conocimiento lógico-matemático* (¶ 76).

Este pensamiento lógico-matemático reúne una serie de aspectos centrales que han sido recurrentes a lo largo de la historia (Saguillo, 2008) pues, desde los resultados incipientes de la Aritmética pitagórica y de la Geometría Euclídea, hasta los desarrollos modernos de los correspondientes sistemas abstractos de la Aritmética de Peano-Göedel y la Geometría de Hilbert, su fundamento se encuentra en el valor epistémico de la "*demostración clásica*".

En razón de los propósitos de este estudio, interesa particularmente una visión – aunque sea de carácter muy general – de la conceptualización de las formas relacionales y su construcción desde la perspectiva cognoscitiva.

Con ese objetivo y con fundamento en el análisis del método de demostración planteado por Solow (1992) y el algunas estrategias de resolución de problemas propuestas por Polya (1990), cabe distinguir e identificar prioritariamente dos modos básicos de establecer las relaciones: uno de ellos es el que corresponde a la situación en la que las relaciones progresan desde los datos, desde las "situaciones de origen", "condiciones suficientes" o "causas" hasta alcanzar las "soluciones finales", "condiciones necesarias" o "efectos"; el otro es el que progresa en sentido contrario, es decir, desde los efectos hacia las causas. En ambos casos, el papel central que juegan las relaciones de consecuencia lógica se sustenta y se motiva (Seguillo, 2008) por los aspectos epistémicos de la capacidad humana del razonamiento y por los aspectos pragmáticos de la actividad humana asociada a esa facultad.

En el primer modo la realización del pensamiento lógico-matemático en la práctica encuentra su núcleo en la deducción entendida como procesamiento de información contenida en las premisas. Deducir, valga la reiteración, es extraer información ya contenida en las premisas o en los eslabones de razonamiento previamente establecidos por la persona como ser inteligente

Ahora bien, en el caso de una deducción que se pueda considerar como una argumentación que no contiene errores de razonamiento o falacias el sendero nos conduce a una "*demostración matemática"* que, en consecuencia, no sería sino una deducción donde las premisas se saben verdaderas.

De esta forma si desde el punto de vista cognitivo (Moon, 2006) una *deducción* muestra que la conclusión se sigue de las premisas, o lo que es lo mismo, que la información de la conclusión está contenida en las premisas; desde ese mismo punto de vista cognitivo una *demostración matemática* muestra que no sólo la conclusión se sigue de las premisas, sino también que esa conclusión es verdadera en virtud de que se sigue de proposiciones sabidas o aceptadas como verdaderas.

Una demostración matemática no sólo proporciona conocimiento de la relación de consecuencia lógica de su conclusión con respecto a sus premisas, sino que además – puesto que sus premisas se saben verdaderas – también proporciona conocimiento de que la conclusión es verdadera. De esta forma, (Seguillo, 2008), en esta circunstancia se emplea el método deductivo para construir una argumentación que determine que la proposición hipotética es consecuencia lógica de primeros principios conocidos o aceptados como verdaderos, lo que proporciona conocimiento de la verdad de lo que hasta ese momento era mera hipótesis.

Por su parte, la *inducción* consiste en establecer enunciados universales ciertos a partir de la experiencia, esto es, ascender lógicamente a través del conocimiento, desde la observación de los datos o circunstancias a la ley universal que los contiene.

El pensamiento inductivo involucra la búsqueda de patrones que, de acuerdo con el National Council of Teachers of Mathematics (1991), es una forma de pensamiento que habilita para llegar a generalizaciones con base en la observación de casos individuales y en la búsqueda de un patrón para esos casos, todo ello bajo el supuesto o la conjetura de que el patrón será el mismo para casos similares.

Por su parte, el pensamiento inductivo está relacionado con la "*generalización*" en tanto que ambos coinciden en la búsqueda de patrones a partir de casos específicos con el fin o pretensión de encontrar una ley general. Tanto Smith (2002), como Poincaré, citado por el mismo Smith (2002), definen la inducción en Matemáticas como "*un instrumento de transformación que contiene, condensados en una sola fórmula un número infinito de silogismos*", de donde se sigue que la generalización es considerada como un caso específico de inducción.

Así las cosas, bien se puede afirmar que la inducción comprende dos fases: la primera que corresponde a la búsqueda de patrones a partir de casos particulares y que es coincidente con la "*generalización*" y el pensamiento inductivo propiamente dicho; y la segunda que corresponde a la demostración de que esos patrones se cumplen o se satisfacen para todos los casos posibles lo que implica una relación directa con el pensamiento deductivo. De esta forma, como señala Polya (1990) inducción y pensamiento deductivo participan en la comprobación de la veracidad universal de los patrones mediante el tipo particular de prueba, la "*demostración por inducción matemática"*.

Por otra parte, los términos argumentación, conjetura, demostración, explicación, justificación y razonamiento se encuentran igualmente vinculados con el razonamiento inductivo, aunque resulta complicado hablar sobre uno de ellos sin hacer referencia a uno o varios de los otros (Cañadas y Castro, 2002). Esos términos, a pesar de que tienen una distancia epistemológica y cognitiva con la demostración formal, son particularmente importantes en la creación y el aprendizaje del conocimiento matemáticos y podrían incluso considerarse una fase previa al desarrollo de la demostración formal (González, 2003).

Por supuesto que la mención prioritaria que se ha hecho de los modos deductivo e inductivo, no excluye ni demerita otras opciones que también son capitales en el establecimiento de relaciones tales como la generalización, el conocimiento y uso del lenguaje simbólico, el correcto razonar y la demostración matemática, las que como apunta Ruesga (2002), suelen presentarse en forma entremezclada y casi conjunta.

Es harto sabido que el pensamiento es un proceso muy complejo y todavía poco comprendido. En su análisis se distinguen dos tipos complementarios de pensamiento: el pensamiento intuitivo y el pensamiento analítico (Bruner, 1960). El primero, como ya se ha señalado, corresponde a construcciones basadas, aparentemente, en una percepción implícita del problema global y no incluye una cuidadosa planificación. En contraste, el pensamiento analítico incluye tanto un cuidadoso razonamiento deductivo, sustentado en principios lógicos que suelen discurrir por un camino delineado de previo, como un proceso "*paso a paso de inducción, experimentación, empleo de principios de diseño de investigación y análisis estadístico*".

El pensamiento lógico-matemático, en congruencia con la singular naturaleza de las Matemáticas, emplea fundamentalmente el pensamiento analítico pero se nutre con suma frecuencia del pensamiento intuitivo, de la imaginación creadora, de la "revelación" de verdades que no se entiende como una acción mágica sino como el aflorar de construcciones que el estudio, la investigación y la experiencia han tejido cuidadosamente.

SOBRE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La Educación Matemática comprende tareas interdisciplinarias muy complejas que, además de lidiar con el saber propiamente matemático, incorporan elementos de otras disciplinas como la Filosofía, la Psicología y las Ciencias de la Educación y que, sólo en tiempo muy recientes, se ha consolidado como un área con investigaciones propias de gran impacto en la práctica de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las Matemáticas.

En los primeros sesenta años del pasado siglo XX apenas si se produjeron algunos cambios significativos en el ámbito de la Educación Matemática, excepto el movimiento de renovación que lideró el gran matemático alemán Felix Klein, en la primera década del siglo, con su proyectos de transformación de la Educación Media y sus famosas lecciones sobre Matemáticas Elementales desde un punto de vista superior.

Sin embargo, no fue sino hasta el inicio de la década del sesenta que se produce un cambio curricular muy significativo en la enseñanza de las Matemáticas escolares, que se suele llamar "*la Matemática moderna*", cuyas bases filosóficas se establecieron durante el seminario de Royamount celebrado en 1959 y que postuló una enseñanza basada en el carácter lógico-deductivo de las Matemáticas al tiempo que unificó los contenidos por medio de la teoría de conjuntos, las estructuras algebraicas y los conceptos de relación y de función propios de las Matemáticas superiores.

Este movimiento de renovación, (De Guzmán, 1991), trajo consigo una honda transformación de la enseñanza, tanto en su talante profundo como en los contenidos nuevos con él introducidos. Entre las principales características del movimiento se pueden contar los siguientes:

- Subrayó la importancia de las estructuras abstractas en diversas áreas, especialmente en Álgebra.

- Petendió profundizar en el rigor lógico y en la comprensión, contraponiendo ésta a los aspectos operativos y manipulativos.

Este movimiento trajo consigo cambios importantes:

- La profundización que promovió condujo, de forma natural, al énfasis en la fundamentación a través de las nociones iniciales de la teoría de conjuntos y en el cultivo del Álgebra, área en donde el rigor es fácilmente alcanzable.

- La Geometría elemental y la intuición espacial sufrieron un severo detrimento.

- Se produjo un vaciamiento de problemas interesantes, tan abundantes en la Geometría, y se sustituyeron por ejercicios muy cercanos a la mera tautología y al reconocimiento de nombres, que es, en buena parte, lo que el Álgebra puede ofrecer a este nivel elemental.

- En la Educación Media ni se aprendían los conceptos ni las estructuras superiores y los alumnos seguían sin dominar las rutinas básicas del cálculo.

Tan sólo una década después fue claro que la llamada "Matemática moderna" había sido un fracaso y, ante esta evidencia, surgieron voces tan autorizadas y prestigiosas como la del ilustre matemático René Thom (1989), citado por García (2001), que señalaron acusadoras que:

> *Ellos, los bourbakistas, abandonaron un campo ideal para el aprendizaje de la investigación: la Geometría Euclídea, mina inagotable de ejercicios y la sustituyeron por las generalidades de los conjuntos y la lógica, que son materiales tan pobres, vacíos y frustrantes para la enseñanza como los que más. El énfasis puesto por los estructuralistas en la axiomática no es sólo una aberración pedagógica sino también matemática* (p. 14).

Estos serios perjuicios surgidos con la introducción de la llamada "Matemática moderna", (De Guzmán, 1991), superaron con mucho las cuestionables ventajas que se había pensado conseguir con ella, tales como el rigor en la fundamentación, la comprensión de las estructuras matemáticas, la modernidad y el acercamiento a la matemática contemporánea.

El fracaso del movimiento de "Matemática moderna" provocó entonces nuevos movimientos renovadores, entre ellos el conocido como "*Retorno a lo básico*", esto es, el retorno a la resolución de problemas y a la matemática como actividad humana, lo que supuso retomar a la práctica de los algoritmos y a los procedimientos básicos de cálculo. Sin embargo, con esta nueva modificación sucedió, como lo señala García (2001), que *"después de un tiempo, se hizo evidente que tal retorno a lo básico no era la solución razonable a la enseñanza de las matemáticas. Los alumnos, en el mejor de los casos, aprendían de memoria los procedimientos sin comprenderlos"* (p. 16).

En consecuencia, el movimiento de "*Matemática Moderna*" tuvo un importante impacto en la Educación Matemática pues, pese a su fracaso y a sus múltiples fallas, tuvo la virtud de llamar la atención sobre la necesidad de mantener una alerta constante sobre la evolución del sistema educativo en Matemáticas a todos los niveles y, como señala De Guzmán (1991), "*los cambios introducidos en los años 60 povocaron mareas y contramareas a lo largo de la etapa intermedia de forma que aún hoy, podernos afirmar sin ninguna duda que seguimos estando, como producto de ello, en una etapa de profundos cambios*" (p. 8)

Es claro que la filosofía prevalente en torno a la concepción de lo que la Matemática es y representa tiene una profunda influencia sobre la definición del camino que tome, como consecuencia, la enseñanza de las Matemáticas. De esta forma, así como el movimiento de "*Matemática Moderna"* se moldeó con el impacto de la corriente formalista de Bourbaki, la filosofía actual de las Matemáticas, como lo señala De Guzmán (1991), "*ha dejado de preocuparse tan insistentemente como en la primera mitad del siglo sobre los problemas de fundamentación de la matemática, especialmente tras los resultados de Gödel a comienzos de los años 30*" (p. 9) para, como lo señala Lakatos (1976), enfocar su atención tanto en un carácter cuasiempírico de la actividad matemática como en los aspectos relativos a la historicidad e inmersión de la matemática en la cultura de la sociedad.

Hoy, la idea-fuerza es mantener en lugar preferente los contenidos intuitivos de nuestra mente en su acercamiento a los objetos matemáticos, sin abandonar la comprensión e inteligencia de lo que se hace. La tendencia general más difundida consiste hoy (Socas y Camacho, 2003) en hacer énfasis fundamentalmente en la transmisión de procesos propios de las Matemáticas más que la simple transmisión de contenidos. Por ello, en Educación Matemática, la consideración central es que las Matemáticas son, sobre todo, como señala De Guzmán (2002) "*saber hacer, una ciencia en la que el método y el pensamiento lógico-matemático claramente predominan sobre el contenido*" (p. 5)

Para mayor abundamiento de razones sobre la trascendencia que tiene hoy en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las Matemáticas el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, baste con reflexionar sobre la inédita rapidez con la que – en razón de la vertiginosa aceleración del cambio que vivimos – es preciso hoy traspasar la prioridad de la enseñanza de unos contenidos que se tornan obsoletos a otros nuevos y de mayor vigencia. Sin embargo, mientras esto sucede con harta frecuencia, los procesos de pensamiento no sufren esa obsolescencia y, por ello, la construcción y el desarrollo de todas las capacidades concurrentes en el pensamiento lógico-matemático constituyen el más valioso instrumento que podemos proporcionar a nuestros jóvenes para su inserción exitosa en este mundo vertiginosamente cambiante.

Por otra parte la actual omnipresencia de la computadora exige un esfuerzo especial en las tareas de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas cuyo acento ha de ponerse también en la razón, en el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, en la comprensión de los procesos matemáticos más que en la mecánica ejecución de simples rutinas que tientan a nuestros alumnos y a los docentes. Lo sustantivo y trascendente ha de ser un desarrollo cabal de las capacidades de pensamiento lógico-matemático del estudiante que promueva el diálogo inteligente con la computadora o con cualesquiera otras herramientas producto de la revolución científico-tecnológica que hoy se vive.

EL PENSAMIENTO LÓGICO-MATEMÁTICO Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Los textos de Matemáticas más antiguos que se conocen provienen de Mesopotamia y son cuatrocientas tablillas de arcilla en escritura cuneiforme que datan de 1900 antes de Cristo. En esas tablillas no se encuentran textos seguidos con los que su autor tratase de explicar algo y sólo de manera muy excepcional aparecen – en lugar de los ejemplos con números que pueblan las tablillas – algunos procedimientos generales. Esta característica tan particular de esos documentos matemáticos primigenios parece evidenciar el carácter eminentemente práctico del desarrollo matemático inicial, sin embargo un análisis más detallado de las tablillas nos revela que en ellas los problemas concretos se encuentran cuidadosamente organizados o clasificados en diferentes tipos y que, además, se hallan pulcramente ordenados empezando por aquellos que son más simples y continuando luego con los más complejos.

En consecuencia, del análisis de esta última característica de las tablillas de Mesopotamia se concluye que en aquellos momentos iniciales, también existió implícitamente una percepción abstracta y general de los procedimientos – aunque en los documentos sólo se expongan ejemplos numéricos – lo que constituye una clara evidencia de cómo el desarrollo del conocimiento matemático y consecuentemente su aprendizaje se encuentran, desde sus orígenes, indisolublemente unidos al desarrollo e instrumentalización de lo que hoy se suele conocer como el "*correcto razonar*", el pensamiento lógico o pensamiento matemático.

Ahora bien, si ésta es la lección de la historia, si la abstracción y el pensamiento lógico acompañan al quehacer matemático desde sus orígenes, entonces es natural suponer que su presencia debe, necesariamente, tener un sitial privilegiado en la planificación y en la realización de todas las experiencias de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, encauzándolas por la misma senda de construcción que fue seguida por el hombre desde la creación de las ideas matemáticas y que coincide con la forma en la que el matemático activo se enfrenta hoy con el problema de matematización de la parcela de la realidad de la que se ocupa, esto es: poniéndose en contacto, por los caminos del "correcto razonar", con la realidad matematizable que da lugar a los conceptos que se quieren explorar con los estudiantes.

Por ello, parece acertado el planteamiento de Archer (2003) quien señala que en la planificación y la ejecución de las tareas de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en todos los niveles y, muy en particular en la Educación Media, se deben privilegiar el desarrollo de las facultades de abstracción y del "correcto razonar" como elementos que favorecen una mayor, más pronta, efectiva y duradera adquisición y apropiación de los conocimientos matemáticos ya que éstos dotan al estudiante – como lo hicieron con los pioneros en la aventura de construcción de las Matemáticas – del andamiaje indispensable para enfrentar exitosamente el problema de relacionar un orden exterior y un orden de pensamiento interior en un proceso que hoy la epistemología-psicología denomina "*cultivo de la capacidad racional".*

Archer (2003) describe inicialmente ese "correcto razonar" como un proceso de ordenamiento de las ideas, de manera que, de su conjunción ordenada, se pueda llegar a deducir conclusiones en clara armonía con las premisas fijadas o respondiendo a las expectativas iniciales que comprendió el reto del nuevo conocimiento. De manera semejante, Dewey (1989) señala que el razonamiento es un producto del pensamiento y que razonar ayuda a ampliar el conocimiento mientras que, al mismo tiempo, depende de lo ya conocido y de las facilidades existentes para comunicar conocimiento y convertirlo en un recurso público y abierto. La matemáticas, señala Dewey, proporcionan el ejemplo típico de hasta donde se puede llevar la operación de relacionar ideas entre sí, sin tener que depender de las observaciones de los sentidos.

Ahora bien, ¿cuáles son los elementos principales iniciales del pensamiento lógico-matemático de los que se espera que se apropie el estudiante de último año de la Educación Media, en los primeros escarceos de su aventura matemática?

Sin pretender ser exhaustivos en la respuesta y siguiendo el orden de la "*matematización horizontal",* (Archer,2003*),* cuando se trata de realizar actividades matemáticas que implican "traducir los problemas desde el mundo real al mundo matemático", se pueden señalar:

- Identificar los conocimientos matemáticos que pueden ser relevantes en la solución del problema que se le plantea.
- Representar el problema de modo diferente.
- Comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal.
- Encontrar regularidades, relaciones y patrones.
- Reconocer isomorfismos con otros problemas ya conocidos.
- Traducir el problema a un modelo matemático.

- Utilizar las herramientas y los recursos adecuados.

En tanto que el orden de la llamada "*matematización vertical*", cuando el estudiante ha sido ya capaz de superar la fase del problema matematizado, sabe aplicar algoritmos conocidos y es capaz de utilizar los conceptos y las destrezas matemáticas aprendidas, debe enfrentar las siguientes tareas

- Utilizar diferentes representaciones.
- Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones.
- Refinar y ajustar los modelos matemáticos, combinar e integrar modelos.
- Argumentar y
- Generalizar.

De esta forma, dado el histórico y natural acompañamiento que hace el desarrollo del pensamiento matemático a la efectiva adquisición de conocimientos en esta disciplina, no es de extrañar que los objetivos generales para la Educación Media definidos por el National Council of Teachers of Mathematics (1991), al igual que los definidos por el Consejo Superior de Educación de Costa Rica (1998), establezcan que los estudiantes de este nivel deben – como tarea prioritaria – desarrollar hábitos mentales matemáticos a la vez que consideran que para la lograr una exitosa enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas es fundamental que los alumnos formulen hipótesis, planteen conjeturas, recopilen evidencias de casos particulares y procuren generalizaciones, enriquezcan el manejo cabal del "correcto razonar" y elaboren argumentos que apoyen estas nociones.

El interés central de esta investigación se orientó precisamente en ese sentido, su propósito fue analizar el impacto que tiene el desarrollo de las facultades del pensamiento lógico-matemático en el rendimiento académico en Matemáticas – en estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos – con el afán de aportar a quienes tienen la responsabilidad nacional del desarrollo del currículo en Matemáticas, al Consejo Superior de Educación que aprueba los planes de estudio y a los docentes que tienen a su cargo la enseñanza de las Matemáticas, elementos que les apoyasen en su esfuerzo por hacer de ésta una aventura placentera y fructífera.

EL SISTEMA EDUCATIVO COSTARRICENSE

Desde los orígenes del Estado de Costa Rica y los primeros días de la República, la Educación ha sido razón de un esfuerzo nacional prioritario y permanente con el que, a lo largo de la historia, generaciones de costarricenses han estado siempre profundamente comprometidas. Los destacados logros alcanzados en la construcción de una educación pública, universal, inclusiva, equitativa y congruente con los requerimientos nacionales, se yerguen hoy en la historia del país como evidencia de esa voluntad y ese compromiso de los costarricenses.

Los objetivos esenciales de la Educación costarricense se encuentran plasmados en la Ley Fundamental de Educación que, en su artículo segundo señala como sus fines:

- La formación de ciudadanos amantes de su patria, conscientes de sus deberes, de sus derechos y de sus libertades fundamentales, con profundo sentido de la responsabilidad y de respeto a la dignidad humana.
- Contribuir al desenvolvimiento pleno de la personalidad humana.
- Formar ciudadanos para una democracia en que se concilien los intereses del individuo con los de la comunidad.
- Estimular el desarrollo de la solidaridad y de la comprensión humana; y
- Conservar y ampliar la herencia cultural, impartiendo conocimientos sobre la historia del hombre, las grandes obras de la literatura y los conceptos filosóficos fundamentales.

El sistema Educativo Costarricense se encuentra dividido jurídicamente en la Educación Preescolar, la Educación General Básica, la Educación Diversificada y la Educación Superior, que comprende tanto la Educación Superior Universitaria como la Para-universitaria.

Por otra parte, con el propósito de favorecer la vigencia efectiva de una educación inclusiva o “educación para todos”, el sistema incluye los programas de Educación de Adultos y de Educación Especial.

Cuadro Nº 1

Ciclos y niveles del Sistema Educativo costarricense

EDUCACIÓN PREESCOLAR
EDUCACIÓN GENERAL BÁSICA Conformada por tres Ciclos Los dos primeros ciclos se conocen usualmente como Educación Primaria
EDUCACIÓN DIVERSIFICADA
EDUCACIÓN SUPERIOR Se separa en dos componentes: Educación Parauniversitaria Educación Superior Universitaria

En razón del ámbito en que se desarrolló esta investigación, fue de especial interés en este estudio el Ciclo de Educación Diversificada que comprende los últimos años de la Educación Media: Décimo y Undécimo para la Educación Académica y Décimo, Undécimo y Duodécimo para el caso de la Educación Técnica.

En términos muy generales, el objetivo establecido para este Ciclo de Educación Diversificada es ofrecer a los estudiantes, distintas opciones que mejor satisfagan sus intereses y necesidades educativas. Si bien existen un significativo número de opciones diversas, oficialmente este Ciclo comprende tres grandes ramas: Educación Académica, Educación Técnica y Educación Artística, aunque por acuerdos del Consejo Superior de Educación también se ofrece opciones en colegios deportivos, colegios ambientalistas, colegios turísticos, colegios experimentales bilingües, colegios indígenas y colegios rurales.

LAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN DIVERSIFICADA COSTARRICENSE

Las Matemáticas se encuentran incorporadas en el currículo del Ciclo Diversificado de la Educación Media académica costarricense – correspondiente a los décimos y undécimos años – como un componente fundamental del “Plan de Estudios” que rige como referente mínimo, tanto en colegios públicos como privados.

El Consejo Superior de Educación – que es el órgano colegiado de rango constitucional con las facultades y la responsabilidad de la dirección de toda la educación oficial desde el nivel preescolar hasta el parauniversitario – ha señalado expresamente, en las palabras introductorias del documento correspondiente a "Planes de Estudio de Matemáticas para la Educación Diversificada" (Consejo Superior de Educación, 1998), la particular valoración que la Educación Costarricense otorga a la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

Dice en ese sentido el Consejo Superior de Educación (1998):

> *Las matemáticas han ocupado un lugar privilegiado en el devenir del conocimiento humano, tanto como descripción de dimensiones especiales de la realidad como lenguaje y fundamento de las otras ciencias. La matematización de las otras ciencias es una característica constante del conocimiento moderno. El llamado al fortalecimiento de la formación matemática constituye uno de los principales reclamos de la nueva etapa La Educación Matemática no sólo debe lograr la obtención de contenidos teóricos o culturales, sino – y esto es esencial – fomentar las destrezas, habilidades y recursos mentales indispensables que debe tener el ciudadano del nuevo orden histórico en las nuevas condiciones. No de manera exclusiva, pero deben ponerse en relieve las calidades de la formación matemática como mecanismo indispensable para el desarrollo de las capacidades analíticas, lógicas, de síntesis y criticidad cognoscitivas, del razonamiento inductivo y la abstracción. La formación matemática debe verse como un gran instrumento para dotar a nuestros ciudadanos de los medios para permitir la construcción y reconstrucción teórica de la realidad física y social; un medio para fortalecer en las nuevas generaciones el pensamiento abstracto y riguroso y la independencia de criterio, premisas centrales para la realización plena de los individuos material y espiritualmente.*
>
> *El fortalecimiento de la formación matemática nacional debe verse también como un camino para solidificar la reflexión independiente y crítica y la escogencia intelectual apropiada entre las diferentes opciones*

que siempre presenta el entorno, y entonces debe verse como un especial sustento para el robustecimiento de los más importantes valores costarricenses.

Apuntalar el espacio científico y tecnológico y el fortalecimiento cultural que la nación plantea, en particular, dotar a la ciudadanía de una formación en matemáticas sólida, moderna, amplia, y de calidad que responda a las exigencias que demanda el nuevo siglo y el contexto histórico presente (p. 3).

Como se colige claramente de la anterior declaración, el Consejo Superior de Educación otorga a la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en el Ciclo Diversificado de la Educación Media costarricense un valor privilegiado en razón de la trascendencia que el conocimiento matemático tiene como fundamento para el desarrollo y el fortalecimiento científicos, particularmente en esta época signada por una profunda transformación científico-tecnológica.

Cabe destacar la especial importancia que el Consejo Superior de Educación de Costa Rica otorga a las Matemáticas como instrumento para fomentar las destrezas, las habilidades y los recursos mentales de los estudiantes – más allá de la simple adquisición de conocimientos – y cómo valora su trascendencia como mecanismo indispensable para el desarrollo de las capacidades analíticas, lógicas, de síntesis y criticidad cognoscitivas, de razonamiento inductivo y de abstracción; lo cual fue enteramente coincidente con el interés que entraña el tema central de esta investigación en relación con el desarrollo de las distintas capacidades de pensamiento lógico-matemático de los estudiantes y de su impacto en el aprendizaje significativo de esta disciplina.

De esta forma, la declaración del Consejo Superior de Educación constituyó un importante soporte para la justificación de la pertinencia del propósito central de esta investigación, en el tanto que ésta se propuso aportar evidencia sobre las relaciones e impacto que el desarrollo de las capacidades del pensamiento lógico-matemático, en estudiantes de undécimo año de colegios académicos diurnos, tiene en una auténtica aprehensión del los conocimientos matemáticos, con la finalidad de obtener conclusiones que pudiesen ser utilizadas para incorporar acciones innovadoras que promuevan una mayor eficiencia en el logro de objetivos señalados como medulares por el Consejo Superior de Educación.

Por otra parte, los grandes lineamientos que orientan las tareas de enseñanza y de aprendizaje de las Matemáticas en el Ciclo Diversificado de la Educación Media costarricense establecidos por el Consejo Superior de Educación (1998), en términos de lo que se espera de los estudiantes, son:

- Que aprendan a apreciar el formidable valor de las Matemáticas.
- Que se sientan seguros de su capacidad para hacer Matemáticas y que confíen en su propio pensamiento matemático.
- Que logren resolver problemas matemáticos.
- Que aprendan a comunicarse mediante las Matemáticas.
- Que aprendan a razonar matemáticamente.
- Que experimenten situaciones abundantes y variadas, relacionadas entre sí, que los lleven a valorar las tareas matemáticas, desarrollar hábitos mentales matemáticos, entender y apreciar el papel que las Matemáticas cumplen en los asuntos humanos.
- Que exploren y puedan predecir e incluso cometer errores y corregirlos de forma que ganen confianza en su propia capacidad de resolver problemas simples y complejos.
- Que puedan leer, escribir y debatir sobre las matemáticas y formular hipótesis, comprobarlas y elaborar argumentos sobre la validez de las hipótesis.
- Que se familiaricen con una Matemática integrada en todas sus áreas.
- Que tengan experiencias variadas en relación con la evolución cultural, histórica y científica de as matemáticas, de forma que puedan apreciar el papel que cumplen las matemáticas en el desarrollo de nuestra sociedad y el impacto que tienen en la cultura y la vida diaria.
- Que exploren las relaciones existentes entre las matemáticas y las disciplinas con las que interactúan.

Más específicamente en lo que concierne al Álgebra y a la Geometría – que son las dos áreas de conocimiento de las Matemáticas sobre las que se enfocó esta investigación – el documento de Planes de Estudio en Matemáticas emitido por el Consejo Superior de Educación (1998) señala:

> *Mediante el tema de Álgebra se pretende, que el estudiante adquiera habilidades y destrezas en el manejo de incógnitas y variables, de tal manera que logre aplicarlas correctamente, no solo en funciones, también en otras áreas de la Matemática misma y del conocimiento humano en general. El valor formativo del álgebra es incuestionable, pues mediante sus aplicaciones, contribuye a desarrollar capacidades de abstracción, de generalización y de manejo adecuado del lenguaje simbólico de las Matemáticas.* (p. 3)

De manera análoga a lo que concierne a la Geometría, el documento reiteradamente mencionado, emitido por el Consejo Superior de Educación (1998), señala que:

> *En los temas de Geometría se debe combinar la intuición, la experimentación y la lógica. Se usarán las construcciones y lo intuitivo para que paulatinamente se logren formular deducciones lógicas, sin que esto signifique que se hará una presentación axiomática-deductiva-rigurosa.*
>
> *Los aspectos experimentales o intuitivos de la geometría requieren de uso de material concreto con características de operatoriedad y flexibilidad, para que a través del análisis y síntesis de situaciones el joven logre construir conocimiento abstracto. Las construcciones geométricas juegan un papel importante, en la medida en que se utilicen para caracterizar las figuras geométricas, para mostrar propiedades y principios matemáticos. Se pide que el estudiante haya experimentado primero con material concreto, ya que permiten integrar los diversos conceptos geométricos y comprender mejor las propiedades de los cuerpos logrando facilitar inferencias al respecto.* (p. 3)

Cabe poca duda, después de leer las anteriores descripciones, que el planteamiento curricular vigente en Costa Rica en el área de las Matemáticas para el Ciclo Diversificado es proclive a los planteamientos de la "*Matemática Moderna",* surgida allá entre los años 50 y 60 del siglo XX..

Consecuentemente la perspectiva vigente se encuentra riesgosamente alejada de las corrientes actuales que rigen la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas y que procuran con gran ímpetu mantener en lugar preferente los contenidos intuitivos de nuestra mente en su acercamiento a los objetos matemáticos, pero prestando esmerada atención a la comprensión e inteligencia de lo que se hace, enfatizando fundamentalmente en la transmisión de procesos lógico-matemáticos de deducción inducción, generalización, uso cabal del lenguaje simbólico-matemático, ejercicio permanente del correcto razonar y manejo creciente de la abstracción y la formalización; más que la simple transmisión de contenidos y el ejercicio reiterativo de la aplicación robotizada de algoritmos, en fin, en las palabras de De Guzmán (2006), "*construir, saber hacer, una ciencia en la que el método lógico-matemático claramente predomina sobre el contenido*" (p. 4).

En el cuadro siguiente se resumen los contenidos correspondientes a los temas de Álgebra y de Geometría que están incluidos en los planes de estudio del Ciclo de Educación Diversificada, correspondientes a los Décimo y Undécimo años para colegios académicos.

No se incluyen en el cuadro los contenidos correspondientes a los temas de Funciones y de Trigonometría, que también forman parte del plan de estudios del Ciclo de Educación Diversificada, pues éstos no fueron específicamente considerados en el análisis que comprendió esta investigación.

Cuadro Nº 2

Planes de estudio de Matemáticas en la Educación Diversificada
Componentes de Álgebra y Geometría

ALGEBRA	**GEOMETRÍA**
Resolver ecuaciones cuadráticas con una incógnita	Círculo y circunferencia
Resolver problemas que involucren ecuaciones cuadráticas con una incógnita	Representación gráfica y simbólica de radio, centro del círculo, cuerda, diámetro, ángulo central, arco, recta tangente, recta secante
Factorización del trinomio de segundo grado con una variable:	Relaciones referentes a la medida entre: - el diámetro y el radio,- la cuerda de mayor longitud y el diámetro,- el ángulo central y el arco que subtiende
Factorización completa de polinomios de tres y cuatro términos con una o dos variables	Circunferencias concéntricas, circunferencias tangentes interiores y exteriores, circunferencias secantes.
Concepto de expresión algebraica	Teoremas: - Una recta perpendicular a un radio en su punto de intersección con la circunferencia, es tangente a la circunferencia. - Toda tangente a la circunferencia es perpendicular al radio, en su punto de tangencia. - En una misma circunferencia, o en circunferencias congruentes, dos cuerdas congruentes equidistan del centro. - En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, las cuerdas equidistantes del centro son congruentes.
Simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias cuyo numerador y denominador estén constituidos por monomios, binomios y polinomios, de no más de cuatro términos, con una o dos variables	Angulo inscrito, ángulo semi-inscrito, ángulo circunscrito.
Operaciones con dos expresiones algebraicas fraccionarias adición, sustracción, multiplicación y división, cuyo numerador y denominador estén constituidos por monomios, binomios y polinomios de no más de cuatro términos.	Relaciones métricas entre los ángulos central, inscritos, seminscritos y circunscritos, y los respectivos arcos que interceptan.
Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.	Áreas y perímetros del anillo o corona circular, del sector circular y del segmento circular
Sistemas de ecuaciones incompatibles y sistemas de ecuaciones dependientes o indeterminados	Polígonos regulares inscritos o circunscritos y sus elementos (en su representación gráfica y simbólica): - Ángulo central, interno y externo de un polígono regular inscrito o circunscrito. - Apotema, radio, diagonal y lado de un polígono regular inscrito o circunscrito.
Solución de un sistema de ecuaciones lineales con una variable	Perímetro y área de polígonos regulares
Ecuaciones exponenciales que se pueden llevar a la forma $a^{P(x)} = a^{Q(x)}$ donde P(x) y Q(x) son polinomios con una variable de grado cero (no simultáneamente), de grado uno o dos.	Relaciones entre los elementos básicos de los polígonos regulares inscritos o circunscritos en una circunferencia:
Ecuaciones logarítmicas que incluyen uno o dos operaciones, y que se pueden llevar a la forma loga f(x) = loga g(x).	Área total y área parcial del cubo, del prisma recto, del cilindro circular recto, de la pirámide regular, del cono circular recto y de la esfera
	Volumen del cubo, cilindro, prisma, pirámide, cono y esfera.

Por otra parte, en lo que se refiere al cultivo del pensamiento lógico-matemático, uno de los fines esenciales de orden general establecido por el Consejo Superior de Educación (1998) para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en el Ciclo Diversificado de la Educación Media señala expresamente "*Que el estudiante aprenda a razonar matemáticamente".*

Este propósito entraña, naturalmente, un claro compromiso con el desarrollo y el fortalecimiento de la capacidad de pensamiento lógico-matemático de los alumnos y, consecuentemente, con un alejamiento de la miope tendencia según la cual el objetivo prioritario de la enseñanza de las Matemáticas consiste en que los estudiantes simplemente "*sepan hacer*", es decir, que tan sólo apliquen mecánicamente algoritmos y memoricen procedimientos, sin llegar realmente a entender ni el significado ni la trascendencia que tiene cada uno de los pasos operativos.

Sin embargo, pese al señalamiento y el compromiso anteriores, en una posterior definición de propuestas metodológicas emitidas por el propio Consejo Superior de Educación (1998), se incorporan elementos que bien pueden interpretarse como un temeroso titubeo frente a la incorporación efectiva de acciones concretas referidas directamente al fortalecimiento del pensamiento lógico-matemático. En su lugar, como se muestra seguidamente, se plantean estrategias ambiguas que más bien minimizan u obvian el cultivo del pensamiento lógico-matemático aunque esta estocada se adorne con palabras y frases distractoras.

Así las "propuestas metodológicas" disponen, entre otras afirmaciones ambiguas y timoratas que:

> Se deben "*reducir los formalismos, las estructuras algebraicas vacías al margen de una estrategia epistemológica, disminuir las demostraciones innecesarias y el excesivo vocabulario complicado y abstracto que ha confundido tanto la enseñanza de las matemáticas*" (Plan de estudios de Matemáticas para Educación Diversificada, 1998)

Cabe preguntarse: al proponer "reducir los formalismos", ¿implica esta vaga determinación, romper con el elemento de formalización que es esencial e inherente a la naturaleza de las Matemáticas?; al señalar que deben reducirse las estructuras algebraicas vacías (sic.) y disminuirse las demostraciones innecesarias, ¿cuáles son las demostraciones consideradas "innecesarias" en la conformación de una estructura matemática que, precisamente, se fundamenta y encuentra su solidez en las pruebas lógicamente estructuradas y concatenadas?; al proponer la eliminación del vocabulario "complicado", ¿significa esto abjurar el lenguaje simbólico matemático al que algunos, desde esta perspectiva, bien podría considerarlo como "complicado"?

Como confirmación de la vigencia de esa visión chata del quehacer matemático, se encuentra que en las orientaciones metodológicas diseñadas por la División Curricular del Ministerio de Educación, como guía para los docentes, se dispone que la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Media, (Ministerio de Educación Pública, 2009), debe enfatizarse – en lugar del cultivo del pensamiento lógico-matemático – en las tareas de hacer, de usar y de operar. De esta forma la prioridad se ubica en hacer, en ejecutar, en operar robóticamente sin apelar a los pilares fundamentales de la disciplina debilitando, además, el espíritu creador y crítico de los alumnos.

De lo anterior se deduce que existe una contradicción entre el espíritu y el fondo de los objetivos de la enseñanza de las Matemáticas en la Educación Diversificada establecidos formalmente por el Consejo Superior de Educación (1998) referentes al prioritario desarrollo de las capacidades de pensamiento lógico de los alumnos y las directrices metodológicas que siguen los docentes y que se orientan a una riesgosa negación de esos principios.

EN TORNO A LA EVALUACIÓN Y LOS INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

CONCEPTO DE EVALUACIÓN

El concepto de evaluación adquiere diversos matices dependiendo del campo, el momento, el contexto y el propósito para lo cual se está evaluando (Mena, 2010), su significado debe entonces ser entendido en términos de la coherencia existente entre la naturaleza de lo evaluado y la validez de los criterios que se empleen para realizar la evaluación.

La evaluación, corresponde a un proceso de obtención de información con base en el que se emiten juicios de valor que sirven de fundamento para la toma de decisiones. Así describe a la evaluación Garrido (1994), citado por Mena (2010, p. 21), cuando afirma que ésta es un "*proceso mediante el cual se emite un juicio de valor y nos permite tomar decisiones con base en un diagnóstico".* Una evaluación que no conduzca o promueva la toma de decisiones, carece de significado.

Esta premisa básica fue un elemento orientador de esta investigación pues en ella comprendió tanto la evaluación del desarrollo de las capacidades de pensamiento lógico en los estudiantes de undécimo año de los colegios académicos costarricenses como la evaluación de su nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en sus vertientes algebraica y geométrica.

En consecuencia, esas tareas de evaluación carecerían de sentido si no hubiesen sido son concebidas y ejecutadas por el investigador con el propósito claro de que sus resultados y las interrelaciones entre ellos pudiesen conducir a aportar información relevante para tomar buenas decisiones de mejoramiento de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en el Ciclo Diversificado de la Educación Media costarricense.

De esta forma, el empleo de dos evaluaciones en el desarrollo de esta investigación respondió a un afán del investigador, coincidente con el criterio de Ravela (2006), citado por Mena (2010, p. 24), en el sentido de que *"la evaluación bien realizada puede ser una herramienta de cambio de enorme potencial. Si los sistemas educativos mejoran los distintos tipos de evaluación que recurren a diario, ello tendrá un enorme impacto en el sistema educativo".*(p. 67)

DE LOS INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

La ejecución de una evaluación realmente fructífera que permita la elaboración de juicios atinados de valor y que, en consecuencia, permita una adecuada toma de decisiones debe fundamentarse en una adecuada valoración sobre la calidad y cantidad de la información requerida de manera que ésta favorezca la adopción de decisiones asertivas que impacten positivamente al sistema educativo.

Para ese fin, debe contarse con instrumentos de evaluación que sean garantes de esa calidad y suficiente cantidad de la información requerida. Un instrumento adecuado (Hernández et al., 2006), es aquél que registra datos observables que representan verdaderamente los conceptos o las variables que el investigador tiene en mente. Condiciones *sine que non* de un buen instrumento de evaluación son la confiabilidad, la validez y la objetividad.

La confiabilidad puede definirse de tres formas diferentes, un primer enfoque la considera como el grado en que su aplicación repetida al mismo sujeto u objeto produce resultados iguales e implica una concepción de confiabilidad (Kerlinger, 1998) en términos de seguridad y de predictibilidad. Un segundo enfoque se resume en el cuestionamiento sobre si las medidas obtenidas con el instrumento son “verdaderas” en términos de propiedad medida e implica una concepción de confiabilidad (Kerlinger, 1998) en términos de exactitud. Finalmente, el tercer enfoque se orienta a investigar la cantidad de *error de medición* que existe en el instrumento. En los tres casos, la confiabilidad es la exactitud o precisión de un instrumento de medición y puede entenderse como la ausencia relativa de errores de medición de un instrumento.

Por otra parte, la validez, en términos generales (Messick, 1989) se entiende como el juicio evaluativo del grado en que la evidencia empírica y el razonamiento teórico sustentan lo conveniente y adecuado de las inferencias y acciones basadas en los puntajes de las pruebas. La validez dice cuán sustentables son las inferencias que puedan hacer a partir de los resultados. Existen varios tipos de evidencias que pueden sustentar esas inferencias: evidencia relacionada con el contenido; evidencia relacionada con el criterio y evidencia relacionada con el constructo.

La primera se refiere al grado de congruencia entre los elementos del instrumento y el contenido específico que se pretende medir. La segunda establece la validez del instrumento de medición al compararla con algún criterio externo que pretende medir lo mismo. Finalmente quizá la más importante es la validez de constructo y se refiere a cuán exitosamente el instrumento representa y mide un concepto teórico, es según Kerlinger (1998) "*un progreso significativo porque vincula las nociones prácticas y las sicométricas con las nociones teóricas*" (p. 475). Crombach (1970), citado por Kerlinger (1998), señala que existen tres partes para la validación del constructo: "*indicar lo que quizá expliquen los constructos acerca del desempeño de la prueba, derivar hipótesis a partir de la teoría en la esta incluido el constructo y probar la hipótesis en forma empírica*" (p. 476).

Cabe señalar que en realidad las pruebas misma no tienen confiabilidad y validez, solamente lo tienen las respuestas dadas a ellas y estas respuestas están en función no sólo de los ítems, tareas o estímulos (Messick, 1989) sino en función de las personas que se someten a la prueba y del contexto en que se produce la medición

Finalmente el instrumento debe ser objetivo, siendo éste un elemento que no siempre es fácil de lograr y que, las más de las veces, se alcanza por consenso. En un instrumento de medición la objetividad se refiere al grado en que éste es permeable a la influencia de los sesgos y las tendencias del investigador. La objetividad se refuerza mediante la estandarización en la aplicación del instrumento y en la evaluación de los resultados

Sobre estos tres pilares: confiabilidad, validez y objetividad se construye la calidad de los instrumentos de evaluación y, con ello, la mayor certeza de realizar un estudio cuya información final sea pertinente, suficiente y de una calidad tal que promueva la consecución del afán fundamental de la investigación, la construcción de acertados juicios de valor y la consecuente toma adecuada de decisiones.

LAS PRUEBAS NACIONALES DE BACHILLERATO EN EDUCACIÓN MEDIA

Las pruebas de bachillerato se han aplicado en Costa Rica desde mediados del siglo XIX e inicialmente servían sólo como control del Estado sobre la enseñanza impartida en los colegios, posteriormente se definieron como requisito para el ingreso a los estudios superiores y como importante fuente de información que retroalimenta al sistema educativo y nutre la toma de decisiones curriculares.

El primer decreto regulador de estos exámenes fue publicado en noviembre de 1892 y a él siguieron varias regulaciones para la construcción, aplicación y calificación de las pruebas que por más de setenta años fueron orales y administradas por tribunales seleccionados por el Ministro de Educación Pública hasta que, partir de 1960, comenzaron a aplicarse en forma escrita y simultánea en todos los colegios de igual modalidad.

De 1973 a 1985 las pruebas fueron eliminadas fundándose en argumentos "facilistas" que campeaban por ese entonces en la Educación Costarricense – y que aún hoy se asoman aquí y allá – según los cuales estas Pruebas de Bachillerato eran fuente de terribles injusticias, fomentaban las desigualdades sociales y consistían en un fin en sí mismas. Con el restablecimiento de las pruebas de Bachillerato en el año 1988 se reinicia, mediante la aplicación de pruebas generales de conocimientos en las asignaturas básicas, un proceso de acreditación del estudiante que egresa de la Educación Diversificada y, muy especialmente, un medio para brindar información pertinente del sistema educativo.

Los exámenes nacionales de bachillerato corresponden a pruebas comprensivas de la materia desarrollada durante la Educación Diversificada y versan sobre los contenidos programáticos correspondientes a Español, Estudios Sociales, Educación Cívica, Ciencias, Matemática e Idioma Extranjero.

Del año 1988 al 1994 y luego a partir del año 1999, la elaboración de las prueba se realiza con el modelo de medición referido a normas. Este modelo, (Barrantes et al.

2009) establece el estatus de un individuo en relación con el desempeño de otros en una prueba particular, de acuerdo con el número o porcentaje de ítems contestados correctamente, o también, el número de puntos acumulados; emplea en la prueba el mayor número de ítems posible para hacer más confiable la medición y así poder discriminar entre individuos con el fin de ubicarlos en una determinada posición y, de acuerdo con ella, asignarles una nota.

Los puntajes obtenidos en una prueba referida a normas resumen lo que el estudiante es capaz de obtener en toda la prueba según señalaron en 1987 Worthen y Sanders, citados por Barrantes et al. (2009). Los resultados son presentados por una curva de distribución normal cuya dispersión de los datos está en relación directa con los resultados del grupo (Brown, 1976), citado por Barrantes et al. (2009); es por esta razón que en la prueba deben utilizarse ítems con diferentes niveles de dificultad para que la dispersión requerida se produzca y los puntajes puedan ajustarse a la curva normal, eliminado los ítems muy fáciles y muy difíciles.

Posteriormente en el año 2005, con fundamento en una disposición del Consejo Superior de Educación, se estableció que para la construcción de los ítems se deben considerar obligatoriamente como referentes los programas oficiales de estudio que son, en consecuencia, los que delimitan el ámbito para la elaboración de las pruebas. Es sobre ese fundamento se elabora una Tabla de Distribución Porcentual de cada programa de estudios en la que se ponderan los objetivos generales del programa de cada asignatura objeto de medición.

En la distribución y la elaboración de ítems para cada objetivo (Barrantes et al. 2009) se cuenta con la participación de docentes de todas las regiones educativas del país y de otros expertos que juzgan la congruencia entre el ítem y el correspondiente objetivo. Además, las pruebas se construyen de forma tal que cada uno de los objetivos esté representado en la prueba por uno o más ítems de forma tal que todos ellos sean apropiadamente medidos. Estos procesos respaldan la validez de contenido del instrumento, como condición esencial para garantizar la legitimidad en la interpretación de los resultados y para la posterior toma de decisiones.

Las pruebas nacionales son elaboradas, administradas y calificadas por la Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad del Ministerio de Educación Pública. Todo alumno que curse el último año de Educación Diversificada definirá su promoción al someterse a las pruebas nacionales de bachillerato en educación media.

En cuanto a la valoración final del postulante la calificación se determina mediante la combinación porcentual de la calificación obtenida en la respectiva prueba de bachillerato con la “nota de presentación”, la cual se define como el promedio de las calificaciones obtenidas por el estudiante en décimo año y en los dos primeros trimestres de undécimo año en Español, Matemática, Estudios Sociales, Educación Cívica, Inglés o Francés (según corresponda) y Biología, Química o Física (según corresponda).

En lo que corresponde al tema específico de esta investigación cabe señalar que, históricamente, las Matemáticas han sido la asignatura con más bajos porcentajes de promoción en las Pruebas Nacionales de Bachillerato de Educación Media, aunque en los últimos años la tendencia parece que tiende a revertirse ligeramente. En este sentido cabe señalar que, en promedio, en los últimos nueve años – del 2004 al 2012 – solamente el 53% de los estudiantes postulantes aprobó enteramente las Pruebas Nacionales de Bachillerato en tanto que la calificación promedio obtenida por los mismos estudiantes en la Prueba específica de Matemáticas fue de un promedio de 66,61.

El siguiente cuadro reúne la información de los últimos nueve años, del 2004 al año 2012, referente al número total de estudiantes de todas las modalidades del sistema que presentaron examen de Bachillerato, el número de estudiantes que aprobó Matemáticas, la nota de examen con la que aprobó Matemáticas y la nota promedio de Bachillerato en Matemáticas modificada con la “nota de presentación” y, finalmente, el porcentaje total de aprobación en Bachillerato de estos últimos nueve años:

Cuadro Nº 3

Resultados en matemáticas

Pruebas Nacionales de Bachillerato 2004-2012

AÑO	Nº de estudiantes	Nº de estudiantes aprobados	Promedio nota de Examen	Promedio de nota de Bachillerato	Porcentaje de Promoción
2004	27.429	19.920	68,57	74,35	72,49%
2005	29.790	23.996	72,77	76,72	80,55%
2006	30.503	22.032	63,63	74,18	72,33%
2007	32.424	26.127	66,67	75,95	80,58%
2008	31.927	25.386	65,64	75,64	79,39%
2009	22.975	19.295	67,37	78,10	83,98%
2010	23.517	19.594	66,49	78,43	83,32%
2011	24.222	18.611	62,16	76,81	76,84%
2012	22.880	18.854	66,20	79,54	82,40%

Elaboración propia

SÍNTESIS DE INVESTIGACIONES PREVIAS SOBRE LOS TEMAS CENTRALES DE ESTE ESTUDIO

Se ha dicho que toda investigación se sustenta en los resultados de estudios previos realizados por otros investigadores en torno a los temas medulares de la investigación. Parafraseando a Isaac Newton, cabe afirmar que si con un estudio se pueden alcanzar nuevos, más amplios y fructíferos resultados, no es sino porque para lograrlo el investigador se ha subido sobre los hombros de otros estudiosos que, antes que él allanaron el camino con las conclusiones producto de su esfuerzo investigador.

Obviamente, el presente estudio no fue una excepción a esta norma de oro de la investigación. La búsqueda, el hallazgo y estudio de la conclusiones que sobre los temas medulares de este trabajo han realizado, en distintos momentos y lugares, otros investigadores fueron invaluable sustento para esta investigación. Se señalarán seguidamente, en apretado resumen, algunos de esos resultados.

En torno al DPLM y el aprendizaje de conocimientos matemáticos

En relación con el impacto del desarrollo de las capacidades de pensamiento lógico-matemático en el aprendizaje significativo de las Matemáticas, diversas investigaciones revelan su radical importancia y, consecuentemente, la pertinencia de ampliar y profundizar los estudios en este ámbito en busca de elementos que provean a la planificación y ejecución de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas de instrumentos para hacer de ésta una aventura académica más fructífera y placentera.

La tarea de ubicación y análisis de los estudios e investigaciones existentes referentes al impacto del pensamiento lógico-matemático en el rendimiento en Matemáticas – que fue un tema central en este investigación – se ha realizado tanto con una visión global como fragmentada en función de grandes áreas de conocimiento de las Matemáticas: la Geometría, el Álgebra y la Aritmética pues es así como han solido proceder los estudiosos y porque, además, esta estrategia es coincidente con las dos áreas de las Matemáticas seleccionadas para esta investigación.

Por su parte, en lo que corresponde al desarrollo del pensamiento lógico-matemático – en congruencia con la línea mayoritaria de los investigadores – las capacidades de deducción, de “correcto razonar” y de demostración matemática se consideraron dentro de los estudios relacionados con la Geometría Euclídea; en tanto que la generalización, la inducción y el uso del lenguaje y simbolismo matemáticos se consideraron dentro de los estudios referentes al Álgebra.

En el marco de la visión de conjunto se encuentra que Andrade, Miranda y Freixas (2000), citados por Moreira (2009), hallaron que el máximo grado de predicción de rendimiento en Matemáticas para los estudiantes de Educación Media lo ocupó en primer lugar el desarrollo del pensamiento lógico-matemático con un 14,2%, siendo el segundo lugar para la llamada “inteligencia lingüística” que aporta un 1,9% de modo que estos dos factores de tan alta vinculación logran predecir, en conjunto, un 16,1% de la dispersión del rendimiento en esta asignatura.

Los docentes de Matemáticas y los especialistas en Educación Matemática saben que el aprendizaje de la demostración matemática es uno de los procesos que mayor dificultad enfrentan los estudiantes, particularmente los de Educación Media pero al que tampoco escapan los alumnos de la Educación Superior que, con frecuencia hallan aquí su mayor escollo inicial. Senk (1985), evaluó los conocimientos geométricos de estudiantes de Educación Media y determinó mediante pruebas aplicadas a grupos de estudiantes de diversas condiciones socioeconómicas, culturales, origen étnico y sexo que de los ítems de conocimientos y habilidades matemáticas en los que se encontraba involucrada una demostración matemática, sólo el 30% de los alumnos lograron alcanzar un el 75% de aceptación en sus respuestas.

Otras investigaciones similares, como la realizada por Brown; Jones y Hirst en el 2004, citados por Mubark (2005) concluyeron con resultados muy semejantes. En su caso los estudios revelaron que sólo el 38% de los estudiantes de Educación Media participantes fueron exitosos en la solución de problemas que implicaban demostraciones matemáticas pero que, además, aquellos que lo lograron se ubicaron en un 84,6% en el percentil más alto de logro general de la prueba. En sus conclusiones estos investigadores realizan un vehemente exhorto a los docentes y autoridades escolares para que estimulen intensamente a los estudiantes en la comprensión de las propiedades geométricas y, muy especialmente la comprensión y empleo de la conjetura, el razonamiento deductivo y la demostración matemática como elementos centrales del cultivo y desarrollo del pensamiento lógico-matemático y del éxito en el aprendizaje de la disciplina. Como nota adicional, de singular interés, estos estudiosos hallaron un rendimiento significativamente superior en los estudiantes varones en los problemas que implicaban demostraciones matemáticas que los obtenidos por sus compañeras mujeres.

En lo que concierne a los procesos tanto de generalización como de conocimiento y uso apropiado del simbolismo y el lenguaje matemáticos, la mayoría de las evaluaciones se realizaron en el marco de investigaciones sobre conocimientos y habilidades algebraicas ya que – como ya ha sido dicho y como muy clara y justificadamente señalaron MacGregor en 1993 y Mason en 1980, citados por Mubark (2005) – el pensamiento algebraico es el que describe con mayor riqueza las generalizaciones mediante su enfoque centrado en la estructura matemática de las proposiciones, a la vez que emplea significativamente el pensamiento lógico-matemático en virtud del papel que cumplen en él los símbolos y el empleo certero de la gramática del lenguaje especializado.

Los investigadores Low y Over en 1993, citados por Mubark (2005), realizaron una investigación en este ámbito con alumnos de educación media superior y hallaron que las mayores dificultades en que tropezaron los estudiantes en la comprensión y resolución de problemas algebraicos tenían origen en su impericia en el conocimiento y aplicación cabal de la conjetura, la generalización y el empleo apropiado del lenguaje simbólico-matemático. En esta investigación, realizada con estudiantes de último año de Educación Media, se pidió a los alumnos que clasificaran treinta y seis problemas algebraicos para que determinaran cuáles de ellos contaban con información suficiente, insuficiente o irrelevante para obtener la solución. Este ejercicio requería de los estudiantes la comprensión y uso correcto del simbolismo y lenguaje matemáticos así como de las facultades de conjetura. Los resultados obtenidos por estos investigadores mostraron una correlación significativa con el rendimiento de los estudiantes en los test generales de conocimientos matemáticos. Como nota adicional que se ampliará luego, esta investigación no mostró que hubiese diferencias significativas entre estudiantes hombres o mujeres.

Por otra parte, las investigaciones que se han realizado con estudiantes de Educación Media dirigidas al análisis del desarrollo de las facultades del pensamiento matemático en términos del "correcto razonar" y sus implicaciones en el aprendizaje de las Matemáticas encontramos que Ediger y Rao (2000) evidenciaron, mediante pruebas realizadas con estudiantes tanto del nivel inicial como superior de Educación Media, que el desarrollo de las capacidades del pensamiento lógico tiene una clara incidencia en el rendimiento de los estudiantes en sus estudios en Matemáticas, siendo que el 82,3% de los estudiantes ubicados en cuartil superior de rendimiento en el test de conocimientos generales de matemáticas correspondió a alumnos con alto desarrollo en el "correcto razonar". Como nota adicional que se ampliará luego, esta investigación no reflejó ninguna diferencia significativa entre estudiantes hombres y mujeres.

De este recorrido por las conclusiones y propuesta de diversos estudios e investigaciones en el ámbito del tema central que orienta y condiciona la presente investigación se sigue que el cultivo de la abstracción y de las diversas facultades del pensamiento lógico-matemático debe constituir un elemento indispensable en la planificación y realización de las tareas de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas como instrumento que favorece una mayor, más positiva y duradera adquisición y empleo exitoso de los conocimientos matemáticos y una enriquecida ampliación del horizonte de conocimientos y destrezas de los estudiantes. En consecuencia, de acuerdo con las conclusiones de los estudios analizados, es preciso atender prioritariamente los elementos de matematización vertical y horizontal; el conocimiento y ejercicio de los razonamientos inductivo y deductivo; la generalización y la demostración matemática; la conjetura y el lenguaje simbólico, en razón de la evidencia aportada del valor predictivo que tiene un cabal desarrollo de esa capacidades del pensamiento lógico-matemático en el rendimiento en Matemáticas y la formación de ciudadanos críticos capaces de una contribución significativa al desarrollo social integral.

En torno al sexo y la capacidad de construcción matemática

Durante el último medio siglo numerosas investigaciones se han ocupado de analizar las relaciones entre las mujeres, los varones y las Matemáticas, configurando un amplio y fructífero campo de estudios que puede estructurarse en las siguientes grandes áreas: los análisis de corte sociológico que analizan la presencia o ausencia de las mujeres en las prácticas y organización de las Matemáticas; los estudios de corte pedagógico que ofrecen propuestas para superar las barreras identificadas; los análisis de los discursos de las Matemáticas que han sido fundamentalmente biológicos en relación con la naturaleza de las mujeres – campo en el que los sesgos y prejuicios aún permanecen – y, finalmente, el debate epistemológico generado en el campo de la historia y filosofía de la Ciencia y las Matemáticas.

Una breve aproximación histórica a las relaciones entre Matemáticas y el sexo de quienes se ocupan de su estudio y construcción, (Figueiras et al. 1998), evidencia una constante en la historia: la tesis de la inferioridad intelectual de las mujeres. Esta tesis que fue argumentada desde Aristóteles sobre la base de supuestos biologicistas y que algunos aún mantienen en la actualidad, sostiene que la mujer es especialmente incapaz para las ciencias más abstractas como las Matemáticas y que así lo evidencia la historia.

Esta última afirmación puede, sin embargo, refutarse fácilmente acudiendo a la propia historia con ejemplos de mujeres que han brindado un extraordinario aporte al conocimiento matemático empezando por Teano en el siglo IV a.C., la célebre pitagórica Hypatia del siglo III, Émile Chatelet, María Gaetana Agnesi, Caroline Herschel, Mary Sommerville, Ada Byron, Sofía Kovalesvakaya, Emy Noether, Grace Murray Hooper, para sólo citar a algunas de las más extraordinarias matemáticas de la historia.

Sin embargo, las tesis de la supuesta inferioridad intelectual de las mujeres han acompañado al desarrollo de la cultura occidental desde antiguo, alimentada por las tesis de Aristóteles y sustentada por la tradición médica con Galeno al frente que situaron la supuesta incapacidad de pensamiento abstracto de la mujer en sus particularidades biológicas, siendo lo realmente crítico la permanencia e inmutabilidad de lo esencial de tal imagen que ha recorrido los discursos religiosos, filosóficos y científicos hasta prácticamente nuestros días.

Estudios recientes, (González, 2003), han analizado este tema con profundidad procurando brindar suficiente sustento para afirmar o negar la consistencia de las conclusiones en relación con las diferencias en los resultados obtenidos por alumnos y alumnas de Educación Media en pruebas de rendimiento en Matemáticas. Así, por ejemplo, se encuentra que en diversas investigaciones (Mullis et al., 2000; Busselmans et al., 1997; Friedman, 1989), citados por Mubark (2005), no se concluye la existencia de diferencias significativas entre hombres y mujeres con edades menores a los doce años. Sin embargo, a partir de esa edad los resultados son contradictorios.

En una investigación pionera realizada en 1974 por Maccoby, citada por Gonzalez (2003), se concluyó que los varones aventajan en habilidades matemáticas a las mujeres a partir de los trece años. Posteriormente, pero cercanos en el tiempo, otros estudios (Halpern, 1996) llegan a conclusiones semejantes y concluyen que “la conclusión de que los hombres califican más alto que las mujeres en un test de habilidades matemáticas es robusta a partir de los trece años”. Sin embargo estas conclusiones divergen de otros estudios como el realizado por Hyde, Fennema y Lamon en 1990, citados por Gonzalez (2003), quienes comparan las diferencias entre hombres y mujeres en Matemáticas con pruebas de opción múltiple y resumen más de doscientas investigaciones, para concluir en que las diferencias a favor de los varones, cuando aparecen, son relativamente pequeñas y poco significativas.

Investigaciones más recientes confirman la complejidad de los resultados. En un estudio internacional acerca del rendimiento en pruebas de Matemáticas con estudiantes de trece años, realizado por Busselmans en 1997, citado por González (2003), evidencia una significativa diferencia a favor de los varones en los siete países estudiados. Por su parte, el análisis de los resultados del "*Third International and Science Study*" (TIMNS) realizado en el año 2000, citado por Gonzalez (2003) evidenció que para estudiantes de Educación Media de treinta y nueve países, sólo en ocho las mujeres obtienen, en promedio, mejores calificaciones en Matemáticas que sus compañeros y que las diferencias globales son pequeñas.

Sin embargo, es de particular interés el estudio realizado en 1998 por Holland y Thayer, citado por Murbak (2005), en torno a los resultados obtenidos por estudiantes de Educación Media, hombres y mujeres, en las diferentes áreas de las Matemáticas (Aritmética, Álgebra, Geometría, Probabilidad y Estadística). El estudio mostró que en un 88% de los ítems no hay diferencias estadísticamente significativas; en el 9% hay un mejor resultado de los varones y en el 3% hay un mejor resultado de las mujeres. Sólo en Geometría se encontró, en promedio, un mayor porcentaje de ítems con resultados superiores en los varones (14% contra 2%). En el resto de los ítems no se encontró diferencias significativas.

Para abundar en resultados de investigaciones realizadas en ese campo, cabe referirse al estudio de Hanna (1986) efectuado con alumnos de octavo año de Ontario. Los ítems incluidos en el test comprendieron cinco aspectos fundamentalmente: aritmética, álgebra, geometría, estadística y mediciones. Sus resultados mostraron una diferencia significativa que evidenció un logro mayor en los hombres tanto en Geometría como en Mediciones. Por su parte, Battista (1990) realizó un estudio en relación con el pensamiento espacial y geométrico de los estudiantes y evaluó en estudiantes de Educación Media en razonamiento lógico, conocimientos geométricos y solución de problemas geométricos, resultando un logro mayor en los estudiantes varones. Otro investigador, Huntley (1990) en su estudio de posibles diferencias de logro de aprendizaje geométrico, planteó unos ítems que venían acompañados de la figura de referencia y otros que no contaban con este apoyo visual. En ese caso, también los varones obtuvieron mejores niveles de logro tanto en uno como en el otro tipo de ítems. Por su parte Senk (1985) estudió las posibles diferencias en la comprensión de la demostración matemática y la Geometría. Los estudiantes fueron evaluados al iniciar el curso lectivo y al finalizar éste, al igual que Battista, Senk encontró una diferencia sustantiva.

Ma en 1995, citado por Mubark (2005), condujo un estudio destinado a analizar la variabilidad en el logro de aprendizaje en Matemáticas entre estudiantes hombres y mujeres, específicamente en Álgebra y Geometría con estudiantes canadienses y estudiantes asiáticos. El cuestionario se basó en la información sobre el logro de aprendizaje en Matemáticas para dos poblaciones una de trece años y la otra de estudiante de último año de educación media contenido en el "Segundo estudio internacional de Matemáticas y Ciencia". Participaron cuatro distintos sistemas educativos el de Ontario, el de Hong Kong, Japón y British Columbia. Se manejo una muestra de 960 estudiantes con 120 estudiantes por cada sistema educativo. Los resultados mostraron que las diferencias en razón del sexo de los estudiantes fueron estadísticamente significativas en los estudiantes de último año en donde los varones superaron a las mujeres en los aspectos geométricos.

Adicionalmente en el TIMSS (2004) en octavo grado y con 49 países participando, los varones alcanzaron mejores niveles de logro que las mujeres en once de los países

En el estudio llevado a cabo por Senk y Usiskin en 1993, citados por Murbak (2005), se evidenció que los varones superaron a las mujeres en relación con los conocimientos de Geometría, en contraste con el área de demostración matemática en el que se encontró que los resultados mostraban eran prácticamente idénticos en hombres y mujeres.

Finalmente, González (2003), ha identificado que las diferencias entre varones y mujeres estudiantes de Educación Media, varían según el procedimiento que se siga. En pruebas de rendimiento las diferencias son pequeñas y pueden favorecer a los hombres o a las mujeres, en tanto que en pruebas de aptitudes, las diferencias son moderadas a favor de los varones, principalmente en aquellos ítems que involucran habilidades visoespaciales y de razonamiento matemático.

Es particularmente importante señalar que diversas investigaciones muestran que la diferencia a favor de los varones en el estudio y en la construcción del conocimiento matemático en alumnos de la Educación Media, responde significativamente a condicionamientos sociales y a sesgos en la percepción o prejuicios inducidos. Recientemente, en 2004 Schmaker y Barquissau, citados por Gonzalez (2003) examinaron la variabilidad individual en el grado en que las mujeres representan los estereotipos de género sobre las habilidades para las matemáticas. Los resultados revelaron que un porcentaje significativo de mujeres asume la idea de que los hombres son superiores que ellas en matemáticas. Se demostró también que, en la medida en que las mujeres ceden ante los estereotipos de género, ello puede ser un indicador de la creencia general en la legitimidad de las diferencias de status entre los sexos y hace suponer que la aceptación de tales estereotipos puede ser una variable importante para explicar o comprender los niveles más bajos de participación de las mujeres en campos relacionados con las matemáticas y sus resultados en general ligeramente más bajos en las pruebas.

Cualquiera que sea la causa, existe un esfuerzo en muchos países por estructurar un entorno educativo que beneficia la igualdad de género, bien sea como resultado directo de medidas educativas o porque hay un contexto social más favorable, o por ambas causas. La diversidad de los resultados de las investigaciones realizadas indican que una afirmación categórica en este tema no es viable, que las diferencias encontradas encuentran su origen en elementos no esenciales de la naturaleza misma de los hombres o de las mujeres y que las políticas y prácticas efectivas podrían superar lo que por mucho tiempo se ha visto como consecuencia de las diferencias en intereses, estilos de aprendizaje e incluso, capacidades subyacentes.

Finalmente, la experiencia de poco más de cuatro década de docencia universitaria del investigador de este estudio sugiere la inexistencia de una relación significativa entre estudiantes costarricenses hombres y mujeres en el desarrollo de su pensamiento lógico-matemático y en su nivel de logro en el aprendizaje de Matemáticas.

EL ÁREA DE PROCEDENCIA COMO FACTOR ASOCIADO AL RENDIMIENTO EN MATEMÁTICAS

Como acertadamente señala Moreira (2009), el rendimiento académico es un tema de alto interés educativo y de investigación que se ha analizado desde las más variadas perspectivas paradigmáticas y contextos. Sin duda, el rendimiento académico es un constructo sumamente complejo en el que intervienen condiciones tanto endógenas como exógenas del estudiante, cuyas relaciones son muy complejas de clasificar, clarificar y distinguir, tal y como ha sido vastamente reconocido en múltiples investigaciones realizadas en las últimas décadas tanto en América Latina como en el resto del mundo.

En lo que a Matemáticas concierne esa enmarañada red de condicionantes no difiere sustancialmente de la de otras asignaturas y en ella se hallan, entre otros factores, el perfil demográfico del estudiante, sus condiciones familiares, sus antecedentes académicos, su disposición positiva o negativa hacia las Matemáticas, la ubicación geográfica de su colegio y su domicilio, las características de los docentes, las estrategias metodológicas empleadas en la enseñanza-aprendizaje de la disciplina, las relaciones socio-dinámicas, el esfuerzo del alumno, su motivación, sus expectativas de éxito y el escenario institucional.

Investigaciones realizadas por Mella y Ortiz en 1999 y por Reimers en 2003, citados por Moreira (2009), para sólo citar dos de las más recientes, evidencian que el lugar de residencia del estudiante – con el consecuente tipo de actividades dominantes en la comunidad y las condiciones generales de vida de la zona – juega un papel favorable o restrictivo en las tareas escolares que realiza, siendo el capital cultural contextual un factor que moldea fuertemente el perfil de distribución del logro escolar (Cervini, 2002). La localización geográfica del colegio y el domicilio del estudiante según concluyó Pong en 1997, citado por Moreira (2009), tiene un significativo impacto en el rendimiento escolar que es claramente congruente con las características de su capital social.

Las condiciones particulares de las áreas rurales, más alejadas de las grandes ciudades traen consigo limitaciones de acceso a bibliotecas y a los centros de comunicación con internet, enfrenta en general la dificultad de docentes menos capacitados y de empleo muy limitado de elementos de apoyo didáctico, fundamentalmente aquellos de origen tecnológico reciente. Sin embargo, a estas características que podrían considerarse negativas, la comunidad rural – precisamente por su tamaño y sus limitaciones – genera, en términos generales, vínculos más fuertes de solidaridad y apoyo entre los pobladores, familias más unidas y ambiente más libre de distractores que desvían en demasía el interés y concentración del estudiante en sus estudios. Circunstancias, en general, inversas a las señaladas para la zona rural, acompañan a los estudiantes de las regiones urbanas con los consecuentes efectos positivos o negativos de ellas en el rendimiento escolar y en el desarrollo de las capacidades individuales de pensamiento lógico.

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

PRESUPUESTOS EPISTEMOLÓGICOS

La investigación cuantitativa, en la que se enmarca este estudio, encuentra su fundamento en el positivismo y plantea la unidad de la Ciencia, i.e., el empleo de una metodología única, igual para las ciencias exactas y naturales, con su aplicación al estudio de lo social. Por este camino se intenta hallar la explicación de los fenómenos determinando regularidades en ellos y hallando leyes generales que explican el comportamiento social con el empleo de la observación directa, la comprobación y la experiencia. El conocimiento, desde esta perspectiva, brota del análisis de los hechos reales, de los que se realiza una descripción fundamentalmente neutra, objetiva y completa.

El positivismo descarta aquellas proposiciones cuyo contenido no se encuentre directa o indirectamente en correspondencia con hechos comprobado, el conocimiento es válido en tanto se sustente en hechos sensibles. Refuta los juicios de valor y prescinde de cualesquiera enunciados precientíficos como las creencias, las percepciones subjetivas, los prejuicios y valoraciones que se entienden como elementos desnaturalizantes. En el paradigma positivista el interés sustantivo se encuentra en la cuantificación y medición que permite decantar repeticiones, tendencias, relaciones y, eventualmente, inferencias

En este capítulo se describen las características del diseño de investigación que fue aplicado en este estudio, el tipo o naturaleza de éste, las opciones seleccionadas en términos de enfoque, la operacionalidad, los procedimientos metodológicos y el desarrollo de la investigación. Se señalan además las fuentes de información, los procedimientos seguidos para la identificación y caracterización tanto de la población en estudio como de la muestra participante y los instrumentos y técnicas de recolección de la información.

TIPO DE INVESTIGACIÓN

Este estudio se enmarcó en el enfoque cuantitativo de la investigación, en tanto que satisface las características que establecen Hernández et al. (2006) como condiciones particulares y distintivas de este enfoque, a saber:

- En este estudio las hipótesis se plantearon antes de recolectar y analizar los datos.
- La recolección de los datos se fundamentó en la medición objetiva de las variables o conceptos contenidos en las hipótesis.
- Por ser producto de mediciones los datos se representaron mediante números y se analizan empleando métodos estadísticos.
- El estudio siguió un patrón predecible y estructurado.
- En el proceso se buscó el máximo control para que otras explicaciones posibles distintas a la hipótesis fuesen desechadas, se excluyese la incertidumbre y se redujese el error.
- La investigación se realizó de la forma tal que los fenómenos que se observaron y midieron no fuesen afectados por el investigador.
- Con el estudio se pretendió explicar y predecir fenómenos, buscando regularidades y correlaciones entre las variables.

Ahora bien, en el marco de este enfoque cuantitativo de la investigación, este estudio fue diseñado, además, con el carácter de una *investigación cuantitativa no experimental o ex post facto, transeccional o transversal y correlacional***.**

Se afirma que fue una investigación de naturaleza *no experimental* o *ex post facto* por cuanto el estudio comprendió una indagación sistemática y empírica en la que el investigador no tuvo ningún control directo sobre las variables independientes correspondientes a las seis facetas constitutivas del pensamiento lógico-matemático que poseían los estudiantes ya que, en el momento de la recolección de la información estas condiciones personales eran, como señala Kerlinger (1998) *"circunstancias que ya ocurrieron, que son propios de los sujetos de la investigación*", ya existían en ellos y consecuentemente no podían ser manipulables por el investigador. Por esa razón, el estudio comprendió la observación de situaciones ya existentes, tal y como ocurrían en su contexto natural y sin que fuesen intencionalmente provocadas por el investigador. De igual forma el posterior análisis de esas observaciones y las inferencias sobre las relaciones de esas variables independientes con los niveles de logro en el aprendizaje de las Matemáticas de los estudiantes, también se realizaron sin que mediase intervención o influencia directa alguna por parte del investigador.

Para un mayor abundamiento de la justificación de la característica *no-experimental* del estudio valga reiterar que si bien a tanto las investigaciones experimental como no-experimentales tienen como propósito básico establecer la validez empírica de planteamientos condicionales de la forma "*si p entonces q*", en la primera como bien señala Kerlinger (1998), la variable "*p*" puede ser manipulada en tanto que en la ex post facto o no-experimental, como es el caso de esta investigación, el control directo sobre las variables independientes – grado de desarrollo en cada uno de los seis componentes del pensamiento lógico matemático, sexo y colegio de procedencia – no fue posible, ni tampoco la manipulación experimental, ni la asignación aleatoria que son los elementos que determinan la diferencia las investigaciones experimental y las investigaciones ex post facto.

Como bien señala Ávila (1999) – a diferencia de lo que sucedió en este estudio – en una investigación experimental las variables independientes se manipulan y por eso se le llama variables activas mientras que en la investigación *ex post facto* como la presente las variables independientes, señaladas supra, no son susceptibles de manipulación y por eso deben ser consideradas como variables atributivas.

Por otra parte, en términos de la dimensión temporal de la investigación o del número de momentos en los que se recolectó la información, este estudio tuvo carácter *transeccional o transversal* puesto que los datos, tanto los referentes al desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico-matemático de los estudiantes como los que concierne a sus niveles de logro en el aprendizaje de las Matemáticas, se recolectaron, cada uno, en un solo momento, en un tiempo único, ya que el propósito de la investigación fue determinar la relación entre el conjunto de variables en un momento particular dado.

Finalmente, el estudio tuvo carácter un *correlacional* por cuanto su objetivo es conocer y mostrar la relación entre las variables en un momento determinado en términos correlacionales apoyándose en la aplicación de un análisis multivariado. De esta forma, el interés de la investigación se centró en la relación entre las variables, en su correlación, sin precisar sentido de causalidad y basado en planteamientos e hipótesis de naturaleza específicamente correlacional.

SUJETOS Y FUENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Toda investigación tiene como referencia un conjunto de unidades de estudio o universo de discurso, al que se denomina técnicamente *unidad de análisis o población en estudio,* y que corresponde al conjunto de entidades respecto de las cuales se formulan las preguntas de la investigación. La definición y la delimitación de esta *población en estudio* – a la que se refieren las conclusiones de la investigación – se realizan en términos del planteamiento del problema que se ha formulado y de los alcances que se propone el estudio.

POBLACIÓN EN ESTUDIO

En esta investigación – en atención a la naturaleza y circunstancias del problema que se planteó y del propósito fundamental del estudio – la *unidad de análisis* estuvo conformada por todos los estudiantes que cursaron en el año 2011 en Costa Rica, el undécimo año de Educación Diversificada en colegios públicos académicos diurnos.

Esta *población en estudio* estuvo conformada por los 22.161 estudiantes, distribuidos en 478 colegios públicos académicos diurnos de educación formal ubicados en veintitrés diferentes Direcciones Regionales de Educación. De esos 478 colegios, 303 están ubicados en zonas calificadas como rurales lo que constituyó el 64.74% del total, en tanto que 165 estaban ubicados en zonas calificadas urbanas lo que correspondió al 35,26% del total. La figura siguiente ilustra esta distribución

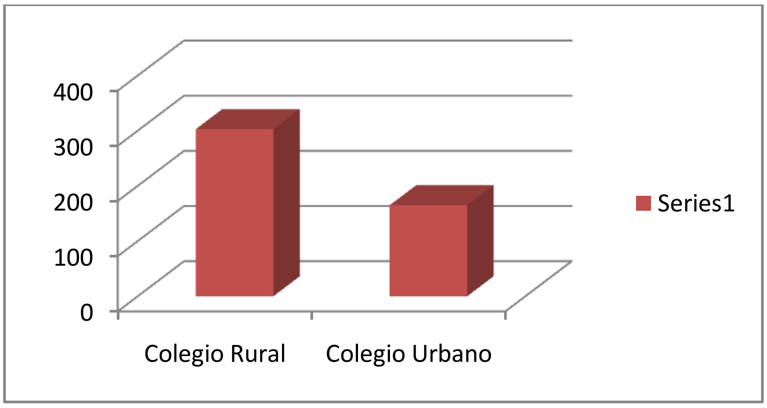


Figura Nº 1

Número de colegios públicos en zonas rural o urbana

Elaboración propia

La población en estudio estuvo conformada por 7994 estudiantes – correspondiente al 36,07% del total – que a la fecha de realizar esta investigación estudiaban en colegios públicos académicos diurnos ubicados en zonas calificadas como rurales, y por 14.167 estudiantes – correspondiente al 63,93% del total – que pertenecían a colegios públicos académicos diurnos ubicados en zonas calificadas como urbanas. La distribución de los estudiantes de la población en estudio, separados según su procedencia de zona rural o zona urbana, se puede visualizar en la siguiente gráfica:

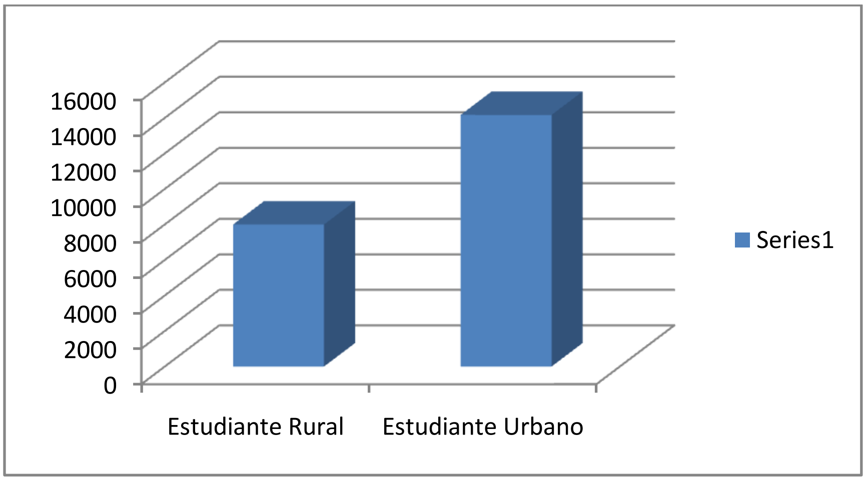


Figura Nº 2
Número de estudiantes de la población de colegios de zonas urbana o rural
Elaboración propia

SELECCIÓN DE INFORMANTES

En razón del alto número de miembros que conformaban la población en estudio, así como de su amplia dispersión por todo el territorio nacional, fue preciso efectuar la selección de una muestra o subgrupo representativo de la población, que constituyó el conjunto de estudiantes de quienes se recolectaron los datos y se obtuvo la información necesaria para establecer las correlaciones entre las variables definidas.

El procedimiento que se siguió para seleccionar esta muestra reunió los requisitos y características necesarios para garantizar, con certeza, que los resultados obtenidos para la muestra pudiesen ser luego legítimamente generalizados o extrapolados al total de la población en estudio

En la definición y ejecución de ese procedimiento de selección de la muestra privó el interés de incorporar una cantidad de estudiantes que pudiese ser cabalmente atendida con los medios y recursos disponibles en el estudio y que, además, fuese representativa del universo de discurso en términos de la perspectiva del propósito de la investigación.

Con este propósito – en términos de procedencia de zona geográfica y de las condiciones socio-económicas de los estudiantes – se consideraron como elementos importantes en el proceso de selección, tanto las características de localización urbana o rural de los colegios al que pertenecían los estudiantes, como la ubicación de estos colegios en las diferentes Regiones Socioeconómicas y las distintas Direcciones Regionales de Educación en que se separa el país.

De esta forma, dada la singular importancia que tiene la representatividad de la muestra en una investigación realizada en el marco de un enfoque cuantitativo – pese a que este concepto de representatividad será siempre un ideal para el cual no existe ningún procedimiento que garantice totalmente su obtención y su verificación – en este estudio la selección de la muestra se realizó cuidando que tuviese elementos de variabilidad semejantes a los que poseía la población total en términos de ubicación en zonas rural o urbana, como en las diversas Regiones Socioeconómicas y en las distintas Direcciones Regionales de Educación.

Para alcanzar este objetivo se procedió según el esquema de trabajo siguiente:

- Se consideró en primer lugar que el país está separado en seis *Regiones Socioeconómicas* según la definición que estableció el Ministerio de Planificación Nacional desde 1984 – con base en la regionalización desarrollada por el geógrafo alemán Helmth Nunth – y que tales regiones son: la Central, la Pacífico Central, la Chorotega, la Huetar Atlántica, la Huetar Norte y la Brunca.

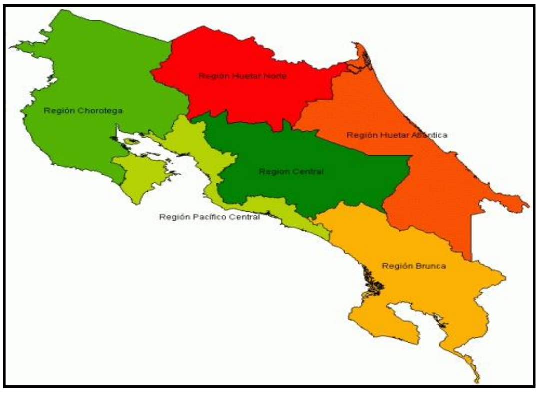


Figura Nº 3
Regiones socioeconómicas de Costa Rica

karensanchezsalas.blogspot.com

- Se consideró en segundo lugar que el Ministerio de Educación Pública ha separado al país en veintitrés Direcciones Regionales de Educación que son: Aguirre, Alajuela, Cañas, Cartago, Coto, Desamparados, Grande de Térraba, Guápiles, Heredia, Liberia, Limón, Los Santos, Nicoya, Occidente, Perez Zeledon, Puntarenas, Puriscal, San Carlos, San José, Santa Cruz, Sarapiquí, Turrialba y Zona Norte.

- De esas 23 Direcciones Regionales de Educación se seleccionó una muestra de 12 regiones – correspondiente al 52,17% del total – teniendo especial cuidado de que en esa selección se encontraran también representadas todas y cada una de las seis *Regiones Socieconómicas de Costa Rica*.

  Las Direcciones Regionales de Educación así seleccionadas fueron: Alajuela, Cartago, Desamparados, Grande de Térraba, Heredia, Liberia, Limón, Los Santos, Puntarenas, Puriscal, San Carlos y San José.

  La representatividad de las Regiones Socioeconómicas de Costa Rica en el grupo seleccionado de Direcciones Regionales de Educación se muestra en el siguiente cuadro:

Cuadro Nº 4

Dirección regional seleccionada según región socioeconómica

Región Socioeconómica	Dirección Regional de Educación Seleccionada
Central	Alajuela, Cartago, Desamparados, Heredia, Los Santos, Puriscal, San José
Pacífico Central	Puntarenas
Brunca	Grande de Térraba
Huetar Atlántica	Limón
Huetar Norte	San Carlos
Chorotega	Liberia

Elaboración propia

- En cada una de las 12 Direcciones Regionales de Educación determinadas según el procedimiento descrito se realizó una selección probabilística de colegios académicos diurnos ubicados en ella obteniéndose, finalmente, el siguiente conjunto nacional de veinte colegios de los que, luego, se habría de seleccionar los estudiantes participantes en la muestra:

Cuadro Nº 5
Colegios participantes en la muestras según Dirección Educativa

COLEGIO	DIRECCION EDUCATIVA	COLEGIO	DIRECCION EDUCATIVA
Liceo de Sabanilla	**Alajuela**	**Colegio de Matina**	**Limón**
Liceo Otilio Ulate Blanco	**Alajuela**	**Liceo de Tarrazú**	**Los Santos**
Liceo de Turrucares	**Alajuela**	**Liceo de Miramar**	**Puntarenas**
Colegio Daniel Oduber	**Cartago**	**Liceo de Puriscal**	**Puriscal**
Colegio Máximo Quesada	**Desamparados**	**Colegio de Tabarcia**	**Puriscal**
Colegio Pacífico Sur	**Grande Térraba**	**Liceo de San Carlos**	**San Carlos**
San José de la Montaña	**Heredia**	**Liceo de Florencia**	**San Carlos**
Liceo del Roble	**Heredia**	**Liceo Jose J.Vargas Calvo**	**San José**
Colegio José Ma. Gutiérrez	**Liberia**	**Liceo Anastasio Alfaro**	**San José**
Colegio Exp. Bil. Siquirres	**Limón**	**Liceo de Costa Rica**	**San José**

Elaboración propia

En la siguiente figura se muestra, en el mapa de Costa Rica, la distribución geográfica en el territorio nacional de los veinte colegios académicos diurnos cuyos estudiantes de undécimo año que fueron incluidos o seleccionados para este estudio:

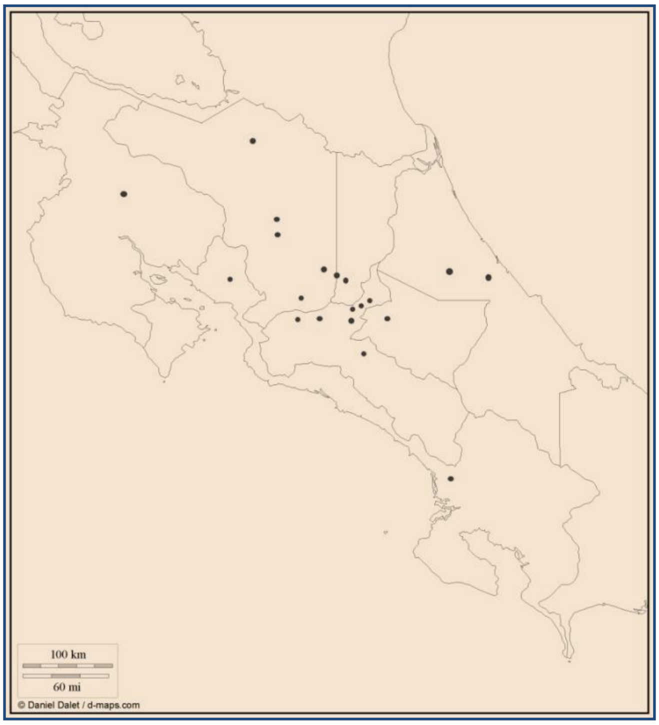


Figura Nº 4
Ubicación geográfica de los colegios seleccionados

Elaboración propia

- De los 20 colegios seleccionados, nueve de ellos – correspondiente al 45% del total – estaban ubicados en zonas rurales y 11 de ellos – correspondiente al 55% del total – estaban situados en regiones urbanas.

- Para realizar la conformación final de la muestra de la población en estudio, en cada uno de los colegios académicos diurnos seleccionados se escogió aleatoriamente a uno de los grupos de undécimo año ya conformados por la Institución. De esta forma, la muestra quedó constituida por los estudiantes incluidos en la unión de todos los grupos de undécimo año de colegios académicos diurnos seleccionados según el procedimiento descrito en los apartados anteriores.

- La muestra estuvo conformada originalmente por 522 estudiantes, a quienes se les administro el test correspondiente en el mes de octubre de 2011.

Sin embargo, en diciembre del mismo año, 37 de los estudiantes incluidos en el grupo muestral original no se presentaron a las Pruebas Nacionales de Bachillerato por lo que la muestra se redujo y el análisis de los resultados comprendió solamente un conjunto de cuatrocientos ochenta y cinco estudiantes.

- De esta forma, el número total de estudiantes incluidos en la muestra fue de 485 alumnos, de los cuales 189 provenían de colegios rurales y 296 de colegios urbanos.

De esta forma se logró muy satisfactoriamente que los porcentajes de estudiantes de colegios rurales y de colegios urbanos contenidos en la muestra, se acercaran muy significativamente a los respectivos porcentajes nacionales ya señalados, pues en la muestra seleccionada el 38,97% a estudiantes de colegios rurales y el 61,03% a estudiantes de colegios urbanos.

Figura Nº 5
Porcentaje de estudiantes procedentes de zona rural o urbana incluidos en la muestra

Elaboración propia.

La conformación porcentual de la muestra para estas variables se comparó favorablemente con la estructura porcentual de la población total como puede observarse en el cuadro siguiente:

Cuadro Nº 6

Estructura porcentual de la población y de la muestra según procedencia rural o urbana

	Proveniente de zona rural	**Proveniente de zona urbana**
Población total en estudio	**36,07%**	**63,93%**
Muestra seleccionada	**38,97%**	**61,03%**

Desde la perspectiva de la conformación de la muestra según la representatividad por género, ésta estuvo constituida por 248 estudiantes varones correspondiente a un 51,13% y 237 estudiantes mujeres correspondiente a un 48,87% .

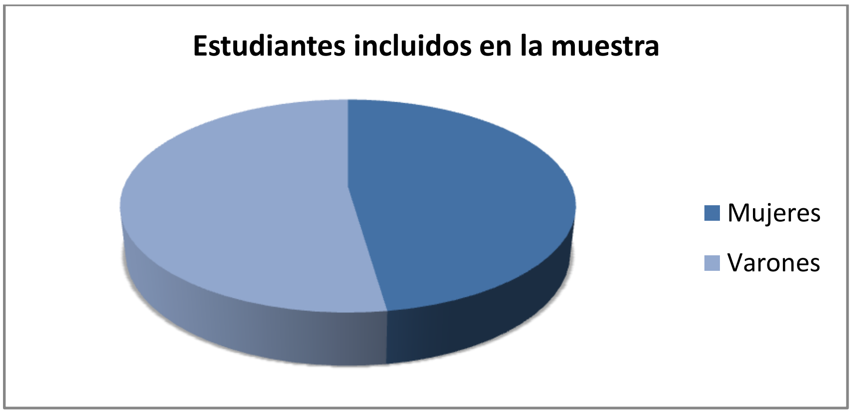


Figura Nº 6

Porcentaje de estudiantes por sexo incluidos en la muestra

Elaboración propia.

Esta conformación porcentual de la muestra según género comprendió valores que, al igual que en el caso de procedencia rural y urbana, también se acercaron muy significativamente al comportamiento nacional pues en tanto que la población total mostraba una relación mujeres-hombres de 102,8 la muestra evidenció un valor de 95,57 para la misma relación.

FUENTES SECUNDARIAS DE INFORMACIÓN

Con el carácter de fuentes secundarias de información se consultó una amplia gama de publicaciones en torno a los distintos temas que se incorporan como constituyentes básicos de esta investigación: antecedentes, contexto, marco teórico, metodología. Esta consulta incluyó libros, revistas especializadas, informes de encuentros académicos, estudios e investigaciones con una orientación cercana a la investigación, artículos publicados en la red, declaraciones, recomendaciones y resoluciones de congresos académicos, directrices establecidas por las autoridades académicas del Ministerio de Educación y documentos que versan sobre los temas esenciales de esta investigación provenientes de estudios propios anteriores.

También constituyeron fuentes secundarias de información múltiples reflexiones conjuntas con numerosos colegas profesores de Matemáticas, tanto del nivel de Educación Media como de la Educación Superior Universitaria.

VARIABLES

Las variables en una investigación son los conceptos que sintetizan las diferentes variedades en que pueden clasificarse los objetos del conocimiento del fenómeno que se está estudiando y constituyen, según lo señalan Hernández et al. (2006), las "*propiedades que pueden fluctuar y cuya variación es susceptible de medirse u observarse*" (p. 123).

En esta investigación se consideraron como variables independientes: la zona rural o urbana en la que estaba ubicado el colegio de procedencia del estudiante, el sexo del alumno y el desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico-matemático de los estudiantes considerada ésta última en seis de sus aspectos fundamentales, a saber, generalización, deducción, inducción, uso de símbolos y de lenguaje matemático, razonamiento lógico y demostración matemática.

Por su parte se consideraron variables dependientes: el nivel de logro de los estudiantes en el aprendizaje de los elementos algebraicos de sus estudios de Matemáticas y el nivel de logro de los alumnos en el aprendizaje de los componentes del área de conocimientos geométricos de sus estudios de Matemáticas.

Cuadro Nº 7

Variables independientes y dependientes

<table>
<tr><th colspan="2">VARIABLES INDEPENDIENTES</th><th>VARIABLES DEPENDIENTES</th></tr>
<tr><td rowspan="6"></td><td>Generalización</td><td rowspan="4">Nivel de logro en el aprendizaje en área de conocimiento de Álgebra</td></tr>
<tr><td>Inducción</td></tr>
<tr><td>Deducción</td></tr>
<tr><td>Uso de símbolos y lenguaje</td></tr>
<tr><td>Razonamiento lógico</td><td rowspan="4">Nivel de logro en el aprendizaje en área de conocimiento de Geometría</td></tr>
<tr><td>Demostración matemática</td></tr>
<tr><td>Sexo del estudiante</td><td></td></tr>
<tr><td>Zona de procedencia</td><td></td></tr>
</table>

Construcción propia

Conforme a la exigencia de la naturaleza ex post facto transeccional y correlacional de esta investigación, las variables independientes no fueron manipulables, pues sus condiciones ya estaban dadas, al igual que lo estaban las correlaciones con las variables dependientes cuando estas existían; correspondió al investigador determinar la existencia y grado de correlacionalidad de esas variables.

En la figura siguiente se muestra un esquema de las posibles y diversas relaciones entre las variables independientes y las variables dependientes que fueron objeto análisis de este estudio:

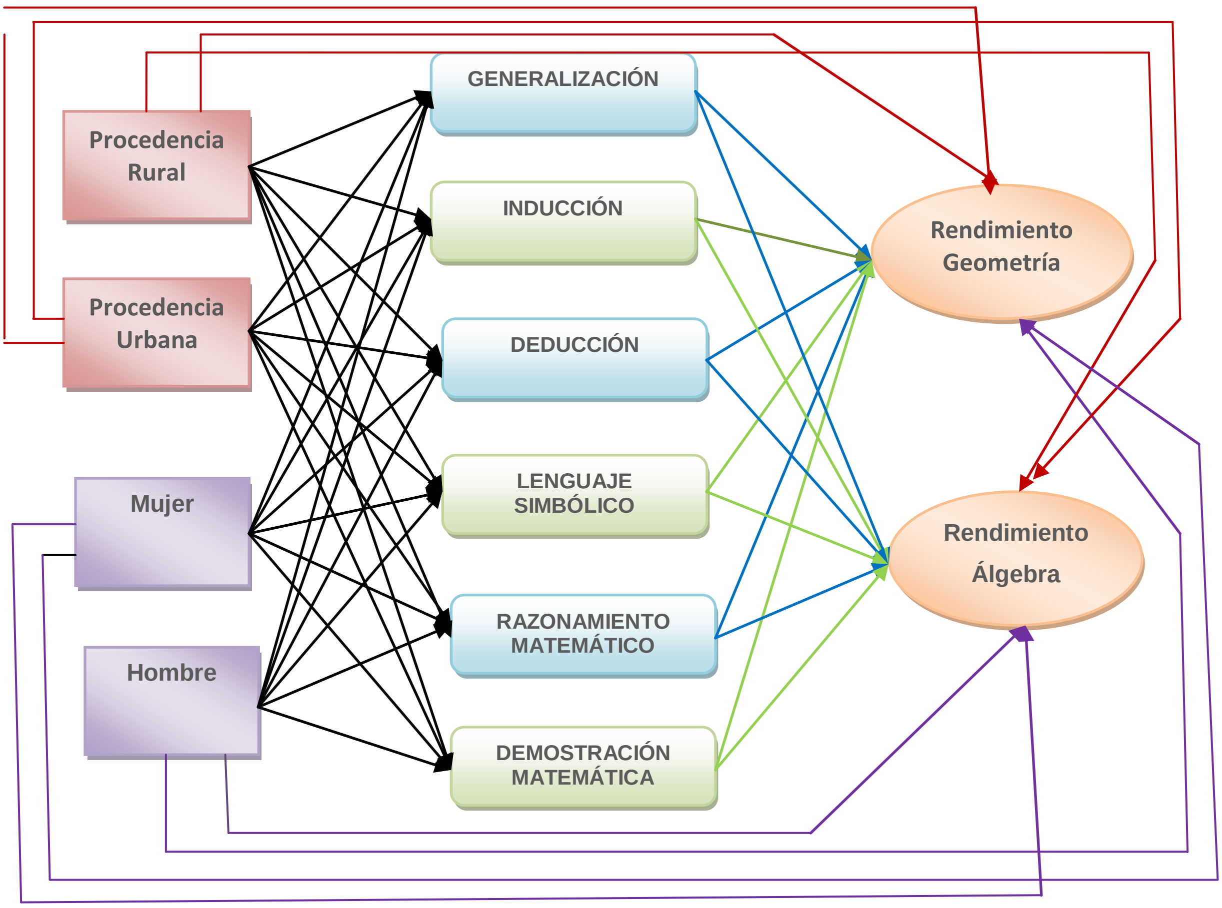


Figura Nº 7

Relaciones entre las variables independientes y dependientes

Elaboración propia

DEFINICIÓN CONCEPTUAL DE LAS VARIABLES

Tal y como los señala Cea (2001), para lograr una mejor comprensión de las variables se requiere definirlas de forma nominal, esto es, establecer una definición conceptual de cada variable.

Seguidamente se presentan las definiciones conceptuales o nominales de las variables que fueron consideradas en este estudio y a partir de las cuales se establecieron los principales aspectos que fueron abordados en los instrumentos de recolección de la información.

PENSAMIENTO LÓGICO-MATEMÁTICO

La determinación del valor de verdad de una proposición puede, según la naturaleza de ésta, estar mediatizada por la posibilidad de constatación empírica de los hechos a los que se refiere y ser alcanzada sólo por los caminos de la inducción u obtenerse por deducción sin necesidad de recurrir a constatación empírica alguna. Este hecho conduce a una irreductibilidad entre estos dos conjuntos de proposiciones y verdades y obliga, en consecuencia, a que cualquier teoría del conocimiento atienda la relación entre de dos formas de conocimiento: el conocimiento lógico-matemático, correspondiente a verdades normativas y el conocimiento físico correspondiente a verdades fácticas.

El pensamiento lógico-matemático es aquel cuya fuente de razonamiento reside en el sujeto, se desprende de la relaciones entre los objetos y procede de la propia elaboración de la persona. El pensamiento lógico-matemático no existe por sí mismo en la realidad de los objetos, sino que la persona lo construye por abstracción reflexiva, en el sentido definido por Piaget (1990) como "*la abstracción que parte de las acciones u operaciones y no meramente de los objetos* (p. 32). El conocimiento lógico-matemático surge de esa abstracción reflexiva pues no es observable y es la persona quien lo construye en su mente; nace de las relaciones y de la coordinación de las acciones que realiza la persona con los objetos.

La abstracción reflexiva se opone a la abstracción empírica en tanto que aquella tiene lugar a partir de dos procesos conjugados que son la proyección del conocimiento existente sobre un plano superior del pensamiento y la organización y reconstrucción de ese conocimiento para formar estructuras nuevas. De esta forma, tal y como lo señala Beth (1980, "*la abstracción reflexiva conlleva dos momentos indisolubles: un proceso* *de reflexión que hace pasar lo que es abstraído de un plano inferior a otro superior (por ejemplo de la acción física a la representación mental) y un producto de la reflexión, que permite una reorganización o reconstrucción cognitiva, sobre el nuevo plano de la que ha sido extraído del plano precedente*" (p. 13).

La fuente del pensamiento lógico-matemático está en el sujeto, se desprende de las relaciones entre los objetos, particularmente los objetos matemáticos, y procede de la propia elaboración que hace la persona como resultante de sus acciones – acciones completamente internas – sobre los objetos. Consiste, pues, en la construcción de acciones mentales sobre objetos mentales. El pensamiento lógico-matemático comprende las habilidades o capacidades de generalización, inducción, deducción, síntesis, abstracción, caracterización, uso de símbolos y lenguaje matemático, razonamiento lógico, definición, identificación, clasificación, interpretación, argumentación y demostración matemática.

GENERALIZACIÓN EN EL PENSAMIENTO LÓGICO-MATEMÁTICO

La generalización, como faceta del pensamiento lógico-matemático es definida por Polya (1990) como el tránsito "*de una observación particular a una importante y valiosa ley general*" (p. 19). La generalización entraña la construcción – a partir del análisis de casos específicos – de fórmulas o proposiciones de carácter general que satisfacen o se cumplen para todos los casos posibles. Stacey (1986) describe la generalización como el proceso por el que se descubren reglas generales mediante la articulación de los patrones observados en muchos casos particulares.

La generalización es un elemento fundamental del pensamiento lógico-matemático, ella constituye, como lo señala Mason et al. (1991) "*la sangre que es fuente de vida para las Matemáticas*". Si no hay generalización, no hay Matemáticas, por ello la generalización está siempre presente e impregna de una gran riqueza a todas los diversos campos de las Matemáticas. La generalización comprende a la búsqueda de modelos o modelización como un componente fundamental del pensamiento lógico-matemático que la precede y que, como lo señala May (1996), "*constituye un elemento* *básico de apoyo para los estudiantes en su desarrollo del pensamiento lógico-matemático y en su aprendizaje de los diversos tópicos de las Matemáticas*" (p. 14).

La generalización, consecuentemente, puede considerarse como un proceso matemático central que permite que observaciones específicas puedan extenderse y ser aplicadas, como una regla general, a todos los casos similares

DEDUCCIÓN EN EL PENSAMIENTO LÓGICO-MATEMÁTICO

Tanto la deducción como la inducción son métodos de conocimiento de tipo mediato que permiten pasar de ciertas proposiciones a otras que se consideran válidas porque las primeras lo son. Ambos métodos tienen, además, reglas que señalan cuándo el procedimiento es correcto y cuándo su aplicación resulta falaz.

En este estudio se acogió la definición de deducción que, como parte del pensamiento lógico-matemático, ofrecen Johnson y Laird (1999), quienes la conceptúan como "*un proceso que conduce a conclusiones válidas, que han de ser necesariamente verdaderas en el tanto en sus premisas sean verdaderas*" (p. 2). De esta forma en una inferencia deductiva, la conclusión se sigue necesariamente de las premisas, es decir, la verdad de las premisas garantiza la verdad de la conclusión.

La deducción, por su parte, se entendió en este estudio, como el proceso de pensamiento lógico-matemático que permite llegar a un resultado válido determinado a partir de una proposición conocida o asumida como verdadera o bien a conclusiones específicas a partir de una ley general.

INDUCCIÓN EN EL PENSAMIENTO LÓGICO-MATEMÁTICO

La inducción, como componente del pensamiento lógico-matemático, es definida por Polya (1990) como "*el proceso de descubrir leyes generales mediante la* *observación y combinación de ejemplos particulares".* De esta forma, la inducción se entiende, en el pensamiento lógico-matemático, como la consecución de un resultado general a partir de un número específico de proposiciones u observaciones. La inducción es un aspecto fundamental del pensamiento lógico-matemático y sucede después de verificar que la regla general o la generalización es efectivamente verdadera para todos los casos. Se induce cuando se generaliza a partir de un número de casos de los cuales algo es verdadero, infiriendo que lo mismo es verdadero para toda la clase.

La generalización forma parte del proceso de inducción. Estos dos aspectos son secuenciales y consecuentemente no son enteramente independientes; la generalización precede a la inducción y su validez se prueba para todos los casos después de que es demostrada mediante la inducción matemática.

La inducción conduce al hallazgo de modelos a partir de casos específicos, es un sendero que conduce de lo particular a lo general en contraste con la deducción que es un camino que, al transitar en sentido inverso, conduce a conclusiones específicas a partir de conclusiones generales, es decir, que avanza de lo general a lo particular.

De esta forma la inducción y la deducción son dos caras de una misma moneda; así como la inducción es un elemento esencial del pensamiento lógico-matemático.

USO DE SÍMBOLOS Y USO DEL LENGUAJE MATEMÁTICO

Autores como Quine (1989), citado por Camacho (2003), explican la naturaleza de la lógica a partir de las expresiones lingüísticas con que se trata siguiendo en ello la idea de Leibniz, para quien el pensamiento lógico debe contar con un lenguaje propio, libre de *vaguedad* y de *ambigüedad.*

La lógica-matemática comprende entre sus elementos constitutivos fundamentales al lenguaje matemático que, como señala Sagüillo (2008) corresponde a "*un subsistema sintáctico gramatical cuya finalidad es capturar la forma lógica de las* *proposiciones que se expresan en una porción de un lenguaje natural*” (p. 8). El uso de símbolos permite que el proceso de generalización matemática, al igual que los otros procesos del pensamiento lógico, pueda ser expresado de manera concisa, precisa y clara

Un símbolo matemático puede ser una letra, una relación o una abreviatura que representa a una expresión, a una cantidad, a una idea, un concepto o un proceso matemático. El uso del lenguaje matemático simbólico significa la capacidad de utilizar símbolos para comunicar ideas matemáticas o verbalizar problemas. Shatnawi (1992) define el uso de símbolos matemáticos como “*un lenguaje para expresar ideas e información matemática”* (p. 9).

RAZONAMIENTO LÓGICO

El razonamiento matemático como elemento constitutivo del pensamiento lógico-matemático cumple un papel fundamental en todas las áreas del quehacer matemático. En este estudio se acogió la posición de MacDonald (1986), quien señala que “*La aceptación de que existen ciertas normas gramaticales con las que se organiza la discusión y el análisis en Matemáticas es lo que hace posible establecer que ciertas proposiciones son efectivamente verdaderas en el ámbito matemático; siendo también esta “gramática” la que hace posible el discurso matemático y lo mantiene cohesionado”* (p. 14).

El razonamiento matemático como constitutivo del pensamiento lógico-matemático fue considerado en este estudio en el sentido en que lo establece como estándar el “National Council of Teachers of Mathematics” que se focaliza más en los aspectos “*gramaticales”* que la argumentación propiamente dicha. Los aspectos “gramaticales” en Matemáticas procuran la organización del análisis de manera que posibilite determinar si una proposición específica es verdadera en el ámbito matemático.

Sin embargo, la "argumentación" en la lógica-matemática corresponde a la habilidad para decidir si las proposiciones son o no lógicamente verdaderas. Se acogió para los efectos de esta investigación la definición de Shatnawi (1992) del razonamiento lógico quien lo conceptúa como "*la transición entre lo conocido y lo desconocido normada por reglas y principios que constituyen la gramática de la lógica*" (p. 9).

CAPACIDAD DE REALIZAR DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS.

Es sabido que los métodos usados por los matemáticos para validar sus construcciones teóricas son edificios conceptuales rigurosamente estructurados que comprenden colecciones de resultados integrados por el principio de deducción aceptada. Se ha dicho – no sin razón – que Matemáticas es demostrar. De ahí la crucial importancia que tiene la capacidad de realizar demostraciones matemáticas como elemento fundamental del pensamiento lógico-matemático.

En esta investigación la capacidad de realizar demostraciones matemáticas se entendió como aquella capacidad para realizar deducciones a partir de premisas que se saben o suponen verdaderas. La demostración de una conclusión "*q*" desde un conjunto "*P*" de premisas verdaderas constituye una construcción que determina la existencia de la relación de consecuencia lógica entre la conclusión y las premisas y que, además, puesto que éstas se saben o suponen verdaderas, proporciona certeza de que la conclusión es lógicamente verdadera.

En el empleo de esta capacidad de usar la evidencia lógica para determinar la verdad de una proposición que se sigue de la prueba de proposiciones previas, es preciso observar la advertencia que hace MacDonald (1986) – particularmente importante en esta investigación debido a la población en estudio – en el sentido de que "*La demostración matemática es de tal magnificencia que nada puede aceptarse como matemáticamente verdadero sin haber sido de previo demostrado rigurosamente por lo que podría caerse en la idea de que únicamente las pruebas formales merecen nuestra atención*" (p. 16).

Logro en el aprendizaje de los elementos algebraicos del estudio de las Matemáticas.

El nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en el área de conocimientos algebraicos fue entendido, en esta investigación, como el grado en que el estudiante ha adquirido los conocimientos y las habilidades algebraicos esperados para los alumnos de undécimo año de un colegio académico diurno, definidos en el plan de estudios aprobado por el Consejo Superior de Educación y que son posibilitados por el estudio, la enseñanza y la experiencia.

Logro en el aprendizaje de los elementos geométricos del estudio de las Matemáticas.

El nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en el área de conocimientos geométricos fue entendido, en esta investigación, como el grado en que el estudiante ha adquirido los conocimientos y las habilidades algebraicos esperados para los alumnos de undécimo año de un colegio académico diurno, definidos en el plan de estudios aprobado por el Consejo Superior de Educación y que son posibilitados por el estudio, la enseñanza y la experiencia.

Sexo del estudiante.

En consonancia con la definición ofrecida por Víquez (2001), para los efectos de esta investigación, se definió el sexo del estudiante "*en relación con la identificación biológica correspondiente de los sujetos de la muestra*" como hombre o mujer, esto es, la condición orgánica masculina o femenina de los alumnos.

UBICACIÓN O ZONA GEOGRÁFICA DEL COLEGIO.

En este estudio, los colegios se clasificaron por su ubicación en dos zonas geográficas distintas: la zona urbana y la zona rural. Con el fin de determinar si un colegio estaba ubicado en una u otra zona, en esta investigación, se siguió la clasificación que de ello ha determinado el MEP fundada en la definición establecida por Pujol (2004) según la cual las variables que deben considerarse para establecer la distinción entre las dos zonas geográficas urbanas y rurales en Costa Rica "*son la separación en tiempo de viaje de la ciudad de San José, el tamaño de la población urbana o la aglomeración urbana funcional a la que pertenece y el aislamiento relativo al conjunto de los asentamientos humanos de Costa Rica*"

DEFINICIÓN OPERACIONAL DE LAS VARIABLES

La definición operacional de las variables constituye la adecuación de la definición conceptual a los requerimientos prácticos de la investigación (Hernández et al., 2006), con ella se describe la esencia o las características de la variable, objeto o fenómeno.

En los párrafos anteriores se han enunciado las definiciones conceptuales de las variables consideradas en este estudio, en el siguiente cuadro se plantea una síntesis de las descripciones operacionales de cada una de esas variables tal y como se emplearon en términos prácticos del estudio.

Cuadro Nº 8

Definiciones operacionales de las variables

VARIABLE	DEFINICIÓN OPERACIONAL
Pensamiento lógico-matemático	Corresponde a la puntuación obtenida en los ítems correspondientes al pensamiento lógico-matemático en la prueba que mide el nivel de desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico-matemático
Generalización en el pensamiento lógico-matemático	Corresponde a la puntuación obtenida en los ítems correspondientes a "generalización" en la prueba que mide el nivel de desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico-matemático
Inducción en el pensamiento lógico-matemático	Corresponde a la puntuación obtenida en los ítems correspondientes a "la inducción" en la prueba que mide el nivel de desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico-matemático
Deducción en el pensamiento lógico-matemático	Corresponde a la puntuación obtenida en los ítems correspondientes a la "deducción" en la prueba que mide el nivel de desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico-matemático
Uso de símbolos y lenguaje lógico-matemático	Corresponde a la puntuación obtenida en los ítems correspondientes al "uso de símbolos y lenguaje matemático" en la prueba que mide el nivel de desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico-matemático
Razonamiento lógico	Corresponde a la puntuación obtenida en los ítems correspondientes al "razonamiento lógico" en la prueba que mide el nivel de desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico-matemático
Capacidad de realizar demostraciones matemáticas	Corresponde a la puntuación obtenida en los ítems correspondientes a "la capacidad de realizar demostraciones matemáticas" en la prueba que mide el nivel de desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico-matemático
Logro en el aprendizaje de los elementos algebraicos del estudio de las Matemáticas	Corresponde a las calificaciones obtenidas por los estudiantes de Undécimo Año de colegios académicos diurnos, incluidos en la muestra, en los ítemes del examen de Bachillerato de Matemáticas de noviembre de 2010, correspondientes al área de Geometría.
Logro en el aprendizaje de los elementos algebraicos del estudio de las Matemáticas	Corresponde a las calificaciones obtenidas por los estudiantes de Undécimo Año de colegios académicos diurnos, incluidos en la muestra, en los ítemes del examen de Bachillerato de Matemáticas de noviembre de 2011, correspondientes al área de Álgebra.
Sexo del estudiante	Se identifican los sexos femenino y masculino, asignando valores de 1 y 2 respectivamente para efectos del análisis de datos, según lo declaran en la inscripción al examen de Bachillerato que hace el Colegio
Ubicación geográfica del colegio	Se caracterizan los colegios académicos diurnos en los que estudian los estudiantes que conforman la muestra en colegios urbanos y colegios rurales según la clasificación establecida por el Ministerio de Educación Pública.

Elaboración propia

PROCEDIMIENTOS APLICADOS EN EL ESTUDIO

El estudio requirió, en primer lugar, de un extenso análisis documental con el propósito de ensanchar el conocimiento e identificar los fundamentos esenciales de los antecedentes, del contexto y de los referentes conceptuales de la naturaleza de las Matemáticas; del pensamiento lógico-matemático en cada uno de sus componentes básicos; del impacto del "correcto razonar" en la construcción del conocimiento matemático; de las características generales de desarrollo de las capacidades de pensamiento lógico-matemático en jóvenes estudiantes de último año de la educación secundaria; de los contenidos algebraicos y geométricos básicos incorporados al currículo oficial para la Educación Diversificada y de los niveles de logro en el aprendizaje de las Matemáticas según los resultados de las Pruebas Nacionales de Bachillerato de Educación Media de los últimos diez años.

La determinación de la población en estudio fue producto de un análisis de las condiciones de diversos grupos etarios de estudiantes costarricenses, considerando los variados rangos de desarrollo de pensamiento lógico-matemático que describen los especialistas; los niveles de conocimiento matemático que se espera de los estudiantes según modalidades, los ciclos y niveles educativos en el sistema costarricense y la cantidad de investigaciones que sobre temas cercanos se hubiesen hecho en el país a diversas poblaciones estudiantiles; para este último criterio se optó por aquellos que han sido menos sujetos de investigación en el campo específico a que se dirigió este estudio.

Se acudió, además, al análisis y discusión no-formales con docentes de Matemáticas de Educación Media y del primer nivel de la Educación Superior Universitaria con el objetivo de fortalecer la información y los criterios sobre el proceso investigado.

Se adoptó la estrategia del cuestionario para la obtención de la información tanto la referente al desarrollo de los diversos componentes de la capacidad de pensamiento lógico-matemático, como en lo que concierne a los niveles de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en sus vertientes geométrica y algebraica.

Para este último caso, se optó por emplear el cuestionario correspondiente al examen de Pruebas Nacionales de Bachillerato en Matemáticas que el Ministerio de Educación administró a todos los estudiantes de undécimo año de colegios académicos diurnos en la convocatoria ordinaria de noviembre de 2011.

A la información así obtenida se adicionó la experiencia del investigador, quien ha estado vinculado directamente con la docencia en Matemáticas en la Educación Media y la Educación Superior Universitaria por cuatro décadas.

Se estableció comunicación directa con el señor Ministro de Educación Pública para obtener su aval y su autorización formales para la realización de la investigación. Igualmente y con la venia del señor Ministro, se establecieron comunicaciones con el señor Director de la División de Control y Gestión de la Calidad, del Ministerio de Educación Pública, con el fin de coordinar las actividades conducentes al acceso a las respuestas de las Pruebas de Bachillerato de Matemáticas de los estudiantes incluidos en la muestra.

También se obtuvo, con la Dirección de esa División, la clasificación formal de los ítems de la Prueba de Bachillerato en Matemáticas con la separación que hicieron los especialistas que las construyeron en grupos referentes a contenidos algebraicos y geométricos. No se consideraron los grupos correspondientes a Trigonometría y Teoría de Funciones pues no fueron objeto de estudio en esta investigación.

Se estableció comunicación con los Directores Regionales en cuya jurisdicción se ubicaban los colegios académicos diurnos incluidos en la muestra con el fin de coordinar las tareas de aplicación de la Prueba de Evaluación del desarrollo de la facultades de pensamiento lógico-matemático, así como con los correspondientes directores de esos centros educativos para coordinas los días, horas y lugar de la visita y administración de la prueba.

TÉCNICAS E INSTRUMENTOS PARA LA RECOLECCIÓN DE DATOS

La información requerida por esta investigación comprendió dos grandes áreas de interés y cada una de ellas se recolectó en un momento diferente:

- La primera en el mes de octubre de 2011 correspondiente a la información sobre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático en los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos, considerado éste en sus aspectos fundamentales de generalización, inducción, deducción, uso de símbolos y de lenguaje matemático, razonamiento lógico y demostración matemática.

- La segunda en el mes de diciembre de 2011, correspondiente a la información sobre el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en sus áreas de conocimiento algebraica y geométrica en términos de los resultados obtenidos en las Pruebas Nacionales de Bachillerato.

Para cada uno de los casos se empleó – como instrumento de recolección para la información – una prueba entendido este instrumento en el sentido que señala Kerlinger (1998), cuando afirma que "*una prueba es un procedimiento sistemático en el cual los individuos son confrontados con un conjunto de estímulos construidos a los cuales responden, de manera que las respuestas permiten al examinador asignar a los examinados valores o conjuntos de valores numéricos a partir de los cuales se pueden hacer inferencias acerca de la posesión de los examinados de aquello que la prueba mida*" (P. 510)

En el primer caso se empleó una prueba cuyo propósito es medir, en los estudiantes de undécimo año de colegios académicos diurnos, el nivel de desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico-matemático considerado globalmente y en cada uno de los seis componentes que fueron seleccionados

El segundo caso, correspondió a una prueba de aprovechamiento entendida ésta en el sentido en que la describe Kerlinger (1998), como un instrumento que corresponde a "*una prueba que mide el aprovechamiento, dominio y conocimiento actuales de determinadas áreas generales o específicas del conocimiento"* (P. 518) y que, en el caso de este estudio, correspondió a una prueba de aprovechamiento especial, estandarizada, que entrañó una medida de la efectividad de la enseñanza y el aprendizaje de los conocimientos matemáticos esperados en estudiantes de undécimo año de colegios académicos costarricenses en la áreas de Geometría y Álgebra.

DISEÑO DE INSTRUMENTOS

En este apartado se realiza una descripción del diseño de los instrumentos empleados en esta investigación para recoger la información pertinente, con especial énfasis en el correspondiente a la prueba cuyo objetivo fue evaluar el grado de desarrollo del pensamiento lógico-matemático alcanzado por los estudiantes, tanto integralmente considerado como en cada una de las seis escalas de Shatnawi.

INSTRUMENTO PARA MEDIR EL DPLM

Para obtener la información referente al desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico-matemático en los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos se empleó un cuestionario, entendido a tenor de lo establecido por Hernández et al. (2006, p. 391), como un instrumento que "consiste en un conjunto de preguntas respecto a una o más de las variables que se van a medir", que pueden ser básicamente de dos tipos: cerradas o abiertas y que, con ellas, se sugiere a los encuestados las mismas probabilidades de respuesta.

El cuestionario es uno de los instrumentos que más se utiliza cuando se trabaja con una muestra grande de individuos, por ello fue el seleccionado para esta investigación ya que la muestra utilizada estuvo conformada originalmente por quinientos veintidós alumnos que es un número alto para un estudio de esta naturaleza y, por lo tanto, como lo indica Rojas (2005), el cuestionario permite llegar con mayor acierto a poblaciones mayores, "*facilita el alcance de datos estandarizados, provenientes de una muestra amplia en un lapso corto, en virtud de la sencillez con que se aplica. El factor tiempo de aplicación garantiza abarcar mayor cantidad de evaluados*" (p. 110). Otro elemento que fortaleció la decisión de su uso consistió en que su aplicación no es compleja y, por ello, basta una capacitación básica para que una persona pueda administrarlo exitosamente a los encuestados.

El cuestionario que se utilizó con la muestra de estudiantes (Ver anexo N° 1) constó de once páginas, en la primera se incluyeron las indicaciones generales dirigidas al estudiante y en las diez páginas restantes se consignaron los ítems propiamente dichos, que fueron separados en seis grupos según las escalas de pensamiento lógico-matemático establecidas para este estudio.

Las seis escalas específicas de pensamiento lógico-matemático que se incluyeron en este instrumento para la evaluación del desarrollo de las capacidades de pensamiento lógico-matemático en estudiantes de undécimo año de los colegios académicos diurnos fueron:

- Generalización,
- Inducción,
- Deducción,
- Uso de símbolos,
- Razonamiento lógico y
- Demostración matemática.

La incorporación en este cuestionario de estas seis escalas específicas del pensamiento lógico-matemático se realizó con fundamento en la construcción y definición de las conocidas "Escalas de Shatnawi" (1982), que son frecuentemente empleadas en los análisis internacionales sobre esta temática. Cabe recordar que las conocidas "Escalas de Shatnawi" fueron construidas, en su momento, por el grupo de analistas que lideró este investigador empleando un riguroso proceso de trabajo conjunto internacional que comprendió tres fases:

- La primera fase comprendió una extensa indagación documental fortalecida con una amplia consulta de alcance internacional, realizada por el autor y por su equipo a académicos universitarios estudiosos del pensamiento lógico-matemático; a profesores universitarios de las carreras de enseñanza de las Matemáticas, a diseñadores de currículo, a especialistas en estrategias didácticas para la enseñanza de las Matemáticas y profesores de Matemáticas de Educación Media.

- El trabajo de esta primera fase realizada por Shatnawi y su equipo (1982), concluyó con una decantación inicial de 14 escalas del pensamiento lógico-matemático, a saber:

Cuadro Nº 9

Catorce escalas inicialmente consideradas en la construcción de Shatnawi

Generalización
Inducción
Deducción
Uso de símbolos
Razonamiento lógico
Demostración matemática
Pensamiento sistémico
Solución de problemas
Especialización
Uso de patrones
Habilidad la optimización de soluciones
Pensamiento creativo
Inferencia a partir de premisas
Habilidad para traducir problemas al lenguaje matemático
Construcción de conceptos

Elaboración propia

- Completada esta tarea, Shatnawi y su equipo continuaron con la segunda fase de definición de las escalas y sometieron de nuevo el conjunto de estas catorce escalas iniciales al estudio y escrutinio internacionales, mediante solicitud de un juicio razonado que se planteó a los mismos especialistas consultados en la primera fase de forma con el fin de que, según su experiencia y criterio especializado, se construyese una síntesis, reducción, focalización, selección y definición del carácter prioritario de las seis escalas específicas de pensamiento lógico-matemático que mejor respondiesen a los propósitos de un estudio integral e incluyente de los componentes del pensamiento lógico-matemático y que pudiesen ser exitosamente evaluadas o medidos - en cuanto a su logro y aprehensión – en estudiantes de Educación Media.

Las conclusiones de esta segunda fase del trabajo de Shatnawi y su equipo fue el conjunto de las seis escalas que se muestran en la tabla siguiente:

Cuadro Nº 10

Escalas de Shatnawi del Pensamiento Lógico-matemático

Generalización	Inducción
Deducción	Uso de símbolos
Razonamiento lógico	Demostración matemática

Elaboración propia

Con la intención de conceder mayor solidez y contextualización a la aplicación de las seis “Escalas de Shatnawi” en el cuestionario dirigido a los estudiantes costarricenses, se optó en esta investigación por realizar la tarea adicional de ampliar la consulta a especialistas nacionales incluyendo las catorce escalas inicialmente definidas por Shatnawi. El conjunto de los 12 especialistas nacionales consultados estuvo conformado por asesores nacionales o regionales de Matemáticas del Ministerio de Educación; especialistas de la División Curricular del mismo Ministerio; responsables de la administración de los curricula en Matemáticas en la Educación Media; especialistas de la División Gestión y Evaluación de la calidad, responsables de la construcción y administración de las pruebas nacionales de Matemáticas para Bachillerato en Educación Media; y profesores de Matemáticas de Educación Media con amplia experiencia en esa labor docente.

En forma análoga a lo hecho por Shatnawi y su equipo, en la segunda fase de construcción de lss escalas al grupo de especialistas nacionales les fueron sometidas las catorce escalas inicialmente definidas por Shatnawi (1982) para que, según su experiencia, conocimiento y criterio especializados, determinaran las seis escalas específicas de pensamiento lógico-matemático que mejor respondiesen a los propósitos de un estudio integral e incluyente de los componentes del pensamiento lógico-matemático y que pudiesen ser exitosamente evaluadas o medidos - en cuanto a su logro y aprehensión – en estudiantes de undécimo año del Ciclo Diversificado de Educación Media costarricense, en colegios académicos diurnos.

Los resultados obtenidos de este análisis realizado con especialistas nacionales fueron – seleccionados por una lujosa mayoría del 91,67% – coincidentes con los alcanzados por Shatnawi en la segunda fase de su trabajo, a saber: generalización, inducción, deducción, uso de símbolos y lenguaje matemático, razonamiento lógico y demostración matemática.

De esta forma, con fundamento en las conclusiones obtenidas tanto en la segunda fase de la construcción internacional de escalas realizada por Shatnawi, como en la consulta a los especialistas nacionales, la prueba empleada en esta investigación para evaluar desarrollo de las capacidades de pensamiento lógico-matemático fue construida por el investigador sobre la base de las seis “Escalas de Shatnawi”: generalización, inducción, deducción, uso de símbolos, razonamiento lógico y demostración matemática.

Así, el cuestionario comprendió inicialmente treinta ítems distribuidos en seis grupos, cada uno de los cuales se conformó con seis ítems que evalúan una misma escala del pensamiento lógico-matemático, según la definición de Shatnawi: generalización, inducción, deducción, uso de símbolos, razonamiento lógico y demostración matemática.

En procura de contar con validez de contenido, el investigador seleccionó los ítems que se incluyeron en esta prueba, para cada una de las seis escalas, de tests estandarizados de calidad internacionalmente reconocida.

Se utilizaron para este efecto, el Tercer estudio internacional de Matemáticas y Ciencia (TIMSS); los tests diseñados para medir desarrollo de pensamiento lógico-matemático en estudiantes de último año de Educación Media realizadas tanto por Mubark (2005) como por Bitner-Corvin (1997); ponencias específicas sobre este tema recogidas en los artículos especializados de Educación Matemática de Petocz y Petocz (1997); Zorn (2003); Shatnawi (1982) y, por último, la experiencia de cuatro décadas de docencia en Matemáticas del propio investigador.

La prueba se construyó con ítems tanto del tipo de "escogencia múltiple" como de "desarrollo". Así, a guisa de ejemplo, el ítem N° 9 de la prueba correspondió al tipo de escogencia múltiple, como puede observarse seguidamente:

Si "x" y "y" son dos números reales positivos tales que $(x \cdot y) = 1$ entonces, ¿cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

a. Si "x" es mayor que 1, entonces "y" debe ser mayor que 1
c. Si "x" es menor que 1, entonces "y" debe ser menor que 1
d. Si "x" es mayor que 1 entonces, "y" debe ser menor que 1
e. Si "x" es igual a 1 entonces, "y" debe ser igual a cero

En tanto que el ítem N°5 de la prueba correspondió al tipo de "desarrollo", como puede observarse a continuación:

Si se sabe que el número de bacterias que hay en una colonia crece exponencialmente de forma tal que ayer a la 1 p.m. había 1000 bacterias, que a las 2 p.m. el número de bacterias era de 2000 y que a las 3 p.m. era de 4000. ¿Cuántas bacterias había en esa colonia ayer a las 6 p.m.?

Es muy importante destacar, como una característica central de la prueba, que tanto para los ítems de escogencia múltiple como para los ítems de desarrollo, en todos los casos se solicitó expresamente al estudiante que escribiese, en la hoja de respuestas, la justificación razonada del porqué de su contestación. Es decir, para cada pregunta el estudiante debió escribir las razones en las que sustentaba su respuesta y una breve explicación del procedimiento que siguió para obtenerla. Con ese fin, la hoja de respuestas (Ver anexo N° 2) fue diseñada de manera tal que el estudiante tuviese, para cada ítem, un espacio suficiente para escribir el razonamiento seguido en cada caso, tal y como puede apreciarse en el ejemplo siguiente:

Cuadro Nº 11

Espacio para razonamiento de respuestas en la prueba de DPLM

Ítem N° 12 La proposición correcta es la correspondiente a la letra: _______
Justificación de la respuesta:

Para mejor atender la exigencia de validez del instrumento, se siguió el siguiente curso metodológico:

- Primero se realizó una amplia consulta bibliográfica sobre el tema y un estudio detallado de instrumentos que se han empleado en otros países para obtener información referente al desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico-matemático en los estudiantes de último año de educación media, particularmente las investigaciones de Mubark (2005) y de Bitner-Corvin (1997) y los estudios realizados en este campo por la NCTM (1995). Cabe destacar que en Costa Rica no se cuenta con experiencias de investigación formal previas en este tema específico.

- A partir del estudio anterior, el investigador procedió a construir un cuestionario inicial con base en la selección de ítems adoptados de tests estandarizados de calidad internacionalmente reconocida y teniendo en todo caso como parámetros orientadores, tanto la definición y características de las seis escalas de pensamiento lógico de Shatnawi ya señaladas, como la experiencia del investigador como profesor de Matemática en la Educación Media y la Educación Superior costarricense durante más de cuatro décadas.

- El instrumento construido inicialmente constó de treinta ítems separados en seis grupos de cinco para cada uno y agrupados, según se ha señalado, siguiendo como criterio la definición y características de cada una de las seis escalas del pensamiento lógico-matemático de Shatnawi.

- La construcción inicial de la prueba se realizó en idioma inglés, puesto que los ítems que la conformaron fueron seleccionados de fuentes originalmente escritas en ese idioma. Luego, un especialista – traductor con formación matemática – realizó una traducción del documento completo al español y, posteriormente, tres docentes de Matemáticas – bilingües inglés-español – verificaron el acierto de la traducción realizada, en su forma, fondo, contenido y sentido, mediante un estudio conjunto y comparado de cada ítem en el inglés original con su versión en español.

- Luego, el instrumento fue sometido a un proceso de validación por un conjunto de seis jueces, profesores de Educación Media, poseedores de una formación académica universitaria de, al menos, Bachillerato en la Enseñanza de las Matemáticas y con una experiencia docente no menor a diez años. Para ello, el investigador confeccionó una tabla con los criterios que debían contemplar los jueces para realizar la tarea de validación. (Ver anexo N° 3)

- El objetivo fundamental de la tarea cumplida por estos seis jueces consistió en adquirir la mayor certeza de que los ítems fuesen altamente congruentes con los elementos de cada una de las seis escalas del desarrollo del pensamiento lógico-matemático que se querían medir, es decir, que reflejasen el dominio específico del contenido que se procuraba medir, considerando además las características de los estudiantes costarricenses a quienes se aplicaría la prueba, y los propósitos particulares de ésta. También se obtuvo de estos jueces criterio vertido sobre la calidad de los ítems: estructura, relación del enunciado y las opciones en los casos que correspondía, forma (redacción y vocabulario), pertinencia de los dibujos, gráficos o figuras, etc. Además, de la estimación de la dificultad "a priori" de cada ítem, se les pidió que brindaran su estimación del tiempo que tardaría un estudiante costarricense de undécimo año de un colegio académico diurno completando el cuestionario.

- Para cumplir con estas tareas, el investigador realizó primero una sesión de inducción con los seis jueces a quienes explicó los objetivos que se pretendía alcanzar con el instrumento, la naturaleza de éste y el trabajo específico que se esperaba de ellos como validadores. En esa misma sesión, en forma conjunta, analizaron todos estos aspectos

- Se realizó una sesión de trabajo con los seis jueces quienes, reunidos en un mismo sitio, pero trabajando individualmente completaron la fórmula con sus criterios y además, muy especialmente, indicaron en el propio cuestionario sus observaciones, sus objeciones y sugerencias, así como los ítems que –en su opinión– debían de ser eliminados por cuanto eran repetitivos o no satisfacían los objetivos previstos. Terminado este trabajo individual, se realizó una amplia discusión sobre los aspectos analizados, una "puesta en común" y una síntesis consensuada de la tarea realizada.

- Después de hecha la validación por el conjunto de los seis jueces, con base en la síntesis de los criterios expresados y de un cruce hecho por el investigador de la información brindada por cada uno, se replanteó el instrumento reduciéndolo a 24 ítems –cuatro para cada una de las escalas de pensamiento lógico-matemático consideradas– lo que implicó una depuración del instrumento en términos de mayor precisión y de una adecuada reducción de su extensión.

- Posteriormente, el instrumento modificado de veinticuatro ítems fue sometido al análisis y validación de una especialista en filología española, gracias a cuyo trabajo se incorporaron elementos de correcta expresión y redacción en castellano.

- Terminadas estas tareas, se procedió a aplicar el instrumento a dos grupos de estudiantes de undécimo año de colegios académicos diurnos –cuarenta y tres estudiantes en total– uno de ellos ubicado en zona urbana y el otro en zona rural, procurando –hasta donde esto fue posible – que en ambos grupos existiera un número muy semejante de hombres y de mujeres. Esta aplicación de la prueba a estos dos grupos la realizó el propio investigador. Como resultado de esta tarea se procedió a omitir o modificar la forma de algunos ítems en razón de la incomprensión evidenciada por los estudiantes, el nivel de dificultad del ítem o bien el grado de discriminación de este que mostró ser muy bajo o muy alto. También se incorporaron cambios significativos tanto en las indicaciones dirigidas a los estudiantes e incluidas en el test, como en el instructivo escrito y dirigido a quienes serían los responsables posteriores de aplicar la prueba.

INSTRUMENTO PARA MEDIR EL RENDIMIENTO EN ÁLGEBRA Y EN GEOMETRÍA

Para realizar la medición del rendimiento de los estudiantes de undécimo año de los colegios académicos diurnos de educación formal en los ámbitos del Álgebra y de la Geometría, se utilizaron las Pruebas de Matemáticas de Bachillerato para la Educación Media que administró la Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad del Ministerio de Educación Pública, en noviembre del 2011, a todos los estudiantes de último año del Ciclo de Educación Diversificada y que, consecuentemente, incluyó a todos los alumnos de los colegios académicos diurnos de educación formal, que correspondía a la población de interés en esta investigación.

Las Pruebas Nacionales de Bachillerato de Educación Media se elaboran siguiendo el modelo de medición con referencia a normas que, según señala Barrantes et al. (2009), establece el estatus del examinando en relación con el desempeño de los otros en una prueba particular, de acuerdo con el número o porcentaje de ítems contestados correctamente, o también, el número de puntos acumulados; emplea en la prueba el mayor número de ítems posible para hacer más confiable la medición y así poder discriminar entre individuos con el fin de ubicarlos en una determinada posición y, de acuerdo con ella, asignarles una nota.

Los puntajes obtenidos en estas pruebas (Barrantes et al., 2009) resumen lo que el estudiante es capaz de obtener en toda la prueba, es decir, están diseñadas para medir el desempeño de un individuo en algún grupo conocido.

En la construcción de estas pruebas (Barrantes et al., 2009) se consideran cinco elementos básicos, a saber:

- Definición de la muestra de objetivos, criterios o conceptos propuestos.
- Descripción del comportamiento que se va a medir.
- Determinación del número de ítems por construir para cada objetivo, criterio, contenido o constructo que se proponga.
- Determinación de evidencia de confiabilidad.
- Determinación de evidencia de validez.

En el diseño de estas pruebas se utiliza, como obligado referente, el Programa de Estudios (Barrantes et al., 2009) que estipula los objetivos y contenidos por medir en las diferentes asignaturas aprobadas por el Consejo Superior de Educación y, para la distribución de ítems para cada objetivo, se cuenta con la participación de docentes de todas las regiones educativas del país.

Los objetivos están representados en la prueba por uno o más ítems; lo que permite que la totalidad de los objetivos sean medidos. Para establecer la ponderación de los objetivos en la prueba, se realiza una encuesta que se aplica en todo el país, con los profesores que imparten lecciones en el Ciclo Diversificado y que permite tener un cuadro de balanceo fundamentado en la importancia relativa que los profesores dan, en promedio, a cada objetivo. Es esta ponderación la que determina el cálculo del número de ítems que será necesario construir para cada uno de los objetivos.

La redacción de los ítems la hacen los especialistas de la Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad apoyados por profesores de Matemáticas de Educación Media, a quienes se les contrata específicamente para ese fin. Cabe señalar, sin embargo, que los ítems redactados por estos últimos pasan por una revisión preliminar por parte de los profesionales encargados de las pruebas, para determinar si son aceptados o rechazados.

Por otra parte, en la construcción de las Pruebas de Bachillerato en Educación Media participan, además de los especialistas de la Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad, otros expertos que juzgan la congruencia entre el ítem y el objetivo. Este proceso respalda la validez de contenido del instrumento, condición esencial para garantizar la legitimidad en la interpretación de los resultados y para la toma de decisiones. Además (Barrantes et al., 2009), para minimizar el error de medición producto de la aplicación de las pruebas, ellas se ajustan a procesos estandarizados de confección, aplicación y calificación, en el marco de la teoría psicométrica de los test.

De esta manera, todos los ítems elaborados son sometidos a un proceso de validación que se basa en la opinión que vierten sobre diversos aspectos, un grupo de tres a cinco jueces, por asignatura. Estos jueces analizan la relación entre el objetivo y el contenido del ítem, su forma y la pertinencia de los dibujos o gráficos, además de estimar a priori la dificultad de cada ítem.

Con los ítems juzgados, se procede a montar las diversas pruebas de una misma asignatura, respetando el cuadro de balanceo y los porcentajes de ítems por los tres niveles de dificultad definidos previamente: fáciles, intermedios y difíciles. Una vez montada la prueba se elaboran los solucionarios respectivos. Cabe señalar que las pruebas montadas son revisadas por el Asesor Nacional de la asignatura, quien puede sugerir modificaciones a ítems e incluso exclusiones de otros.

En lo que concierne a la confiabilidad, es importante destacar que la Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad del Ministerio de Educación Pública (Barrantes et al., 2009) ha dispuesto tener como referente para las Pruebas de Bachillerato en Educación Media, la definición de confiabilidad entendida como el grado de consistencia existente entre dos medidas de un mismo objeto – en el sentido que señalan Mehrens y Lehmann (1982), citados por Barrantes et al. (2009) – es decir, corresponde a la consistencia interna de las puntuaciones de la prueba.

En este sentido, en el concepto de confiabilidad utilizado en el modelo referido a normas – que es empleado en las Pruebas de Bachillerato –, entre mayor sea el rango de diferencias individuales en las puntuaciones de la prueba mayor será la confiabilidad de ésta (Barrantes et al., 2009), por lo que la estimación de confiabilidad se obtiene como la razón de la varianza de la calificación real de la prueba con la varianza de su calificación observada. Sin embargo, dado que la varianza de la calificación real no puede calcularse directamente, la confiabilidad de las Pruebas de Bachillerato se estima mediante un procedimiento que considera las diversas fuentes de error de medición, siendo el Alfa de Cronbach –según lo dispuesto por la Dirección de Gestión y Evaluación del MEP– el índice de confiabilidad que mejores condiciones reúne, ya que indica el grado de consistencia interna de la prueba y resume aquellos factores asociados al error de medición.

Es particularmente importante destacar que, de la Prueba de Bachillerato de Matemáticas del año 2011 dirigida a colegios académicos diurnos sólo se consideraron, para los efectos de esta investigación, aquellos ítems contenidos en ella que correspondían específicamente a las áreas de Álgebra y Geometría. Las áreas restantes no fueron objeto de análisis en este estudio.

METODOLOGÍA PARA LA ADMINISTRACIÓN DE LOS INSTRUMENTOS

En este apartado se esboza una descripción sobre las estrategias y procedimientos seguidos para la administración de los dos instrumentos empleados para la recolección de la información sobre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático y en nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en las áreas de conocimiento de Geometría y de Álgebra.

Es necesario indicar que, considerando que la Prueba Nacional de Bachillerato en Matemáticas –de la que se obtienen los resultados de nivel de aprendizaje de las

Matemáticas– es elaborada y administrada por el Ministerio de Educación Pública, los elementos que se incluyen en relación con la administración de ésta son más bien someros.

METODOLOGÍA PARA ADMINISTRAR EL TEST PARA MEDIR EL DPLM

La prueba para medir el desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico-matemático se aplicó a los estudiantes de cada uno de los grupos de undécimo año incluido en la muestra, durante su tiempo lectivo regular y en el aula en la que usualmente recibían las lecciones.

Para la aplicación de la prueba se siguió el siguiente curso metodológico:

- Se informó al señor Ministro de Educación el propósito del estudio y se solicitó su autorización para visitar los colegios y coordinar con los directores la aplicación de la prueba.

- Con la autorización del señor Ministro, el investigador habló con el Director o Directora de cada uno de los veinte colegios participantes, a quienes les explicó los propósitos y alcances del estudio y con quienes coordinó la selección del grupo de estudiantes de undécimo año al que se aplicaría la prueba, así como el día y la hora apropiada para hacerlo.

- Se elaboró un instructivo escrito que sirviese como guía, orientación e instrumento de uniformidad de trabajo para las personas que administrarían las pruebas (Ver anexo N° 4).

- Se conformó un grupo de ocho estudiantes de último nivel de la carrera de Bachillerato en la Enseñanza de las Matemáticas y el propio investigador para que atendieran la administración de las pruebas. Con este grupo se hizo un análisis del instructivo propuesto, se clarificaron dudas y se le introdujeron mejoras. Con el mismo grupo se hizo, además, un estudio conjunto del test, se discutieron las respuestas y se hizo un ejercicio de planteamiento de las dudas más probables que podrían presentar los estudiantes durante la prueba.

- Se elaboró un cronograma de administración de las pruebas – según lo acordado con la institución en cada caso–, se asignó a cada integrante del grupo dos o tres colegios en los que debería administrar la prueba y se diseñó un esquema de rutas de transporte para llevar y traer a cada integrante del grupo al colegio en el que habría de administrar la prueba.

- Se comunicó al director o directora de cada uno de los veinte colegios incorporados en el estudio, el nombre completo y teléfono móvil del encargado de administrar la prueba y, en dos días diferentes antes de la fecha acordada, se habló telefónicamente con los directores para confirmar la visita y coordinar los aspectos logísticos requeridos.

- La prueba se aplicó a los estudiantes durante su tiempo lectivo regular y la administración de la prueba se realizó en la misma aula en la que usualmente reciben las lecciones de Matemáticas, en el mismo colegio en el que están matriculados.

- Una vez que cada estudiante completaba el instrumento, se verificó que lo hubiese hecho en forma correcta, que incluyera en la hoja de respuestas su nombre completo, el nombre del colegio y su número de cédula de identidad.

Esta última información fue indispensable por ser la única identificación que se emplearía luego en la Prueba Nacional de Bachillerato de Matemáticas y que, consecuentemente, permitiría la ubicación y correlación con los resultados obtenidos en ésta.

METODOLOGÍA PARA ADMINISTRAR EL TEST DE NLAM

Las Direcciones Regionales de Educación tienen una participación directa en la administración de las Pruebas de Bachillerato en Educación Media, lo que incluye, por supuesto, la correspondiente a Matemáticas; son responsabilidades de las Direcciones Regionales: el nombramiento de los delegados ejecutivos, auxiliares y administradores de las pruebas; el transporte y la aplicación de las medidas de seguridad; la coordinación con los directores de las instituciones y los aspectos logísticos que la administración de las pruebas requiera.

La administración de las pruebas estuvo a cargo de los delegados ejecutivos, con apoyo del delegado auxiliar y los educadores administradores de las pruebas.

METODOLOGÍA PARA LA EVALUACIÓN DE LOS RESULTADOS DE LA PRUEBAS

En este apartado se hace una relación de los elementos más significativos de la metodología empleada para realizar la evaluación de la prueba de medición del desarrollo del pensamiento lógico-matemático en los estudiantes de undécimo año de colegios académicos diurnos incluidos en la muestra. No se hace referencia pormenorizada de la metodología que se empleó para el mismo fin en la prueba de nivel de logro en el aprendizaje en Matemáticas por cuanto ésta fue una tarea realizada por la División de Evaluación del Ministerio de Educación Pública.

METODOLOGÍA PARA LA PRUEBA DE DPLM

Para la calificación de la prueba destinada a medir el desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico-matemático de los estudiantes de undécimo año se elaboró una escala de medición que comprendió, de manera muy especial, la valoración de la característica particular de esta prueba según la que, para cada ítem –tanto los de selección múltiple como los de desarrollo– los estudiantes, además de seleccionar la alternativa correcta o de calcular la respuesta acertada, debían justificar por escrito la razón para seleccionar la alternativa escogida o para efectuar el proceso de cálculo realizado, según fuese el caso.

Debido a que para un test de esta naturaleza no se contaba con patrones de medida universalmente definidos, ni escalas generalmente reconocidas, el investigador se vio obligado a recurrir a escalas utilizadas en otros estudios similares, particularmente los de Mubark (2005) y de Bitner-Corvin (1997) y, con base en ellos, construir una adaptada a las necesidades específicas de esta investigación.

Se asignó cero puntos a los ítems que no fueran respondidos o cuya respuesta fuera totalmente incorrecta y cuatro puntos a los ítems que fueran contestados correctamente y con una justificación razonada igualmente correcta. Para éstos y para los valores intermedios – uno, dos y tres puntos – se definieron las normas o reglas que dieran sentido objetivo y claro a cada asignación, que establecieran las condiciones para discriminar en forma constante entre un valor y otro y que, efectivamente, permitiera medir las cualidades para las que fue construida y no otras parecidas, tal y como puede verse en el cuadro siguiente:

Cuadro Nº 12

Criterios para la puntuación de las respuestas en la prueba de DPLM

PUNTAJE	DESCRIPCIÓN DEL TIPO DE RESPUESTA
4	La alternativa seleccionada o el resultado del cálculo realizado son correctos. La justificación comprende conceptos y procedimientos acertados y claros, así como explicaciones y trabajo matemático adecuados. Hay evidencia de una clara comprensión de los conceptos y los procedimientos matemáticos involucrados.
3	La alternativa seleccionada o el resultado del cálculo realizado son correctos. La justificación ofrecida evidencia una comprensión parcial de los conceptos y procedimientos matemáticos o tiene elementos de razonamientos correctos pero incompletos o con elementos inadecuados de correcto razonar.
2	La alternativa seleccionada o el resultado del cálculo realizado son correctos. La justificación evidencia un razonamiento incoherente que, además, no muestra comprensión de los conceptos o procedimientos matemáticos La alternativa seleccionada o el resultado del cálculo realizado son incorrectos. La respuesta contiene un razonamiento plausible con conocimiento de algunos conceptos y procedimientos matemáticos.
1	La alternativa seleccionada o el resultado del cálculo realizado son correctos. La respuesta no ofrece la justificación de la escogencia o no muestra los procedimientos en los que se fundamenta la selección
0	La alternativa seleccionada o el resultado del cálculo realizado son incorrectos. La justificación es incoherente y no evidencia comprensión de los conceptos o procedimientos matemáticos, o bien y no ofrece ninguna justificación No selecciona ninguna alternativa y no ofrece justificación alguna

Para la tarea de calificación de las pruebas se conformó un grupo de seis especialistas en Enseñanza de las Matemáticas, el investigador y cinco de los profesionales que habían participado en el proceso de validación del instrumento. El proceso se realizó en sesiones en las que, en todos los casos, estuvo siempre presente todo el equipo, lo cual enriqueció notablemente el trabajo pues el intercambio de opiniones y criterios permitió, en ocasiones, dilucidar situaciones individuales o grupales de duda

La respuesta de cada ítem de la prueba de cada estudiante fue calificada por tres jueces diferentes. La metodología seguida consistió en que el equipo completo calificó simultáneamente las respuestas de un mismo ítem de todas las cuatrocientos ochenta y cinco pruebas, hasta que cada respuesta de ese ítem particular fuera calificada por tres jueces distintos. Terminado ese proceso el equipo continuaba con la calificación – en iguales condiciones – del ítem siguiente. Para ello se elaboró un programa de cómputo en el que cada uno de los tres jueces consignaba la calificación que otorgaba a la respuesta de cada ítem; para ese fin, cada uno de los jueces contó con una clave de ingreso al programa, a la vez que cada estudiante tuvo un número de identificación y los ítems se numeraron del uno al veinticuatro. Con esta información, el programa fue diseñado para que no aceptara que un mismo juez asignara una calificación dos veces a la respuesta de un mismo ítem de un mismo estudiante.

Por otra parte, el diseño del programa de cómputo estableció que, si después de calificado un ítem específico por tres de los jueces, se determinaba que había una diferencia entre dos de las calificaciones otorgadas, mayor a un punto, el sistema alertaba sobre la necesidad de la intervención de un cuarto juez.

La calificación de cada ítem podía ser, según la escala y las definiciones para cada caso, de 4 puntos, 3 puntos, 2 puntos, 1 punto o cero puntos.

La calificación final cada ítem se obtuvo según las siguientes alternativas:

- Si los tres jueces, actuando independientemente, coincidían en un mismo valor de calificación, entonces, la calificación del ítem correspondía al valor en que todos coincidieron.

- Si los tres jueces no coincidían en un mismo valor, pero la diferencia entre dos cualesquiera de las calificaciones no era mayor a un punto, entonces la calificación final correspondía a la moda en el conjunto de los tres puntajes asignados.

- Si los tres jueces no coincidían en un mismo valor y, además, la diferencia entre dos de las calificaciones era mayor o igual a un punto, entonces el sistema de cómputo alertaba automáticamente sobre la necesidad de convocar a un cuarto juez. Después de hecha la calificación por el cuarto juez, se consideraban las cuatro calificaciones resultantes, se eliminaba el puntaje del juez más divergente y se definía con los tres jueces restantes el puntaje definitivo siguiendo el mismo método de la alternativa inmediata anterior.

METODOLOGÍA PARA LA PRUEBA DE NLAM

Las pruebas de Bachillerato de Educación Media administradas por el Ministerio de Educación Pública – en particular las correspondientes a Matemáticas– se calificaron y los resultados se analizaron estadísticamente mediante programas de cómputo tales como ITEMAN y el conocido SPSS. La calificación de las pruebas se realizó de manera electrónica y fue una tarea que ejecutó la Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad del Ministerio de Educación Pública. Esta dependencia, después de calificadas las pruebas, conservó en archivo digital los resultados obtenidos por cada estudiante en cada uno de los ítems siendo esos resultados, por esta razón, la fuente esencial de información que nutrió los datos de rendimiento en Álgebra y Geometría de los estudiantes incluidos en la muestra estudiada en esta investigación.

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

El análisis de los datos (Kerlinger, 1998) comprende las tareas de categorizar, ordenar, manipular y resumir los resultados obtenidos en el estudio, con la finalidad de dar respuesta a las interrogantes que se plantearon y que dieron origen a la investigación. Este análisis implica transformar el conjunto de los datos obtenidos para dotarlos de una estructura y una forma que los haga más fácilmente comprensibles e interpretables, de manera que faciliten el trabajo de estudio y la tarea de construcción de las conclusiones en torno a las características y las relaciones existentes entre los problemas propuestos por la investigación.

Por ser esta una investigación de naturaleza cuantitativa, el análisis de los datos que se obtuvieron como resultado de este estudio se realizó con apoyo de la Estadística como instrumento de trabajo que permite, (Kerlinger, 1998), manipular y resumir los datos numéricos y comparar los resultados obtenidos con las expectativas previstas.

En estas tareas se emplearon como herramientas de apoyo informático los programas Statistical Package for the Social Sciences, SPSS, y el Linear Structural Relations, LISREL 8.8. El primero facilitó la tarea de dar un formato especial a las salidas de los datos para su uso posterior: tablas, clasificación de datos, análisis multivariados de variables, árboles de clasificación o de decisión, modelos de regresión, clasificación de datos, pruebas no paramétricas, e instrumento de estadística inferencial, entre otros. El LISREL 8.8, que es un programa usado en el análisis de ecuaciones estructurales, se utilizó en la modalidad de Análisis Factorial Confirmatorio para la validación de la estructura del cuestionario de DPLM.

Naturalmente, el sólo análisis de los datos resultantes de la investigación no proporciona, por sí mismo, las respuestas a las preguntas planteadas como objetivo del estudio, por lo que fue preciso abocarse luego a la interpretación de esos datos, es decir, explicarlos, darles significado. En esta fase posterior de interpretación se utilizaron los resultados del análisis para hacer inferencias relativas a las relaciones entre las variables de la investigación y presentar las conclusiones sobre estas relaciones

LAS HIPÓTESIS NULAS

Como es sabido, el propósito principal de una investigación de esta naturaleza es probar las hipótesis de la investigación o hipótesis sustantivas que expresan una afirmación en relación entre dos o más variables. Estrictamente hablando (Kerlinger, 1998), una hipótesis sustantiva no es susceptible de ser probada o evaluada si no es primero "traducida" a términos operacionales mediante hipótesis estadísticas que, según Kerlinger (1998), constituyen "*una predicción de los resultados de los procedimientos estadísticos usados para analizar los datos cuantitativos del problema*" (p. 214).

El proceso de prueba de una hipótesis de investigación implica la comparación de esta contra algo que usualmente es la hipótesis nula, es decir, como lo señala Kerlinger (1998), contra una proposición estadística en la que lo que se plantea básicamente es que no hay relación entre las variables del problema.

Con ese fin, se construyeron en esta investigación hipótesis nulas descriptivas de un valor o dato pronosticado, hipótesis que negaban o contradecían las relación entre dos o más variables e hipótesis que negaban la semejanza o diferencia entre dos o más variables que sirvieron luego para confirmar, refutar o negar lo que afirmaba la hipótesis de investigación. Tales hipótesis nulas fueron las siguientes;

- Primera hipótesis nula: No existe diferencia significativa en el desarrollo del pensamiento lógico-matemático – ni globalmente considerado ni individualmente en cada una de las seis escalas de Shatnawi – entre los estudiantes costarricenses de undécimo año de zonas rurales y los de zonas urbanas.

- Segunda hipótesis nula: No existe diferencia significativa en el desarrollo del pensamiento lógico-matemático – ni globalmente considerado ni individualmente en cada una de las seis escalas de Shatnawi – entre los estudiantes costarricenses de undécimo año, sean estos mujeres u hombres.

- Tercera hipótesis nula: No existe diferencia significativa en el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas – ni en el área de conocimiento de Geometría ni en el área de conocimiento del Álgebra – entre los estudiantes costarricenses de undécimo año de zonas rurales y los de zonas urbanas.

- Cuarta hipótesis nula: No existe diferencia significativa en el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas – ni en el área de conocimiento de Geometría ni en el área de conocimiento del Álgebra – entre los estudiantes costarricenses de undécimo año sean éstos mujeres u hombres.

- Quinta hipótesis nula: No existe una relación significativa entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático de los estudiantes de undécimo año de los colegios costarricenses académicos diurnos –tanto globalmente considerado como para cada una de las escalas de Shatnawi– y su nivel de logro en el aprendizaje de Matemáticas en el área de conocimiento de Geometría.

- Sexta hipótesis nula: No existe una relación significativa entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático de los estudiantes de undécimo año de los colegios costarricenses académicos diurnos –tanto globalmente considerado como para cada una de las escalas de Shatnawi– y su nivel de logro en el aprendizaje de Matemáticas en el área de conocimiento de Álgebra.

- Sétima hipótesis nula: No existe una relación significativa entre el nivel de logro en el aprendizaje de la Geometría y el conjunto de variables conformado por el sexo del estudiante, su procedencia rural o urbana y su nivel de desarrollo del pensamiento lógico-matemático globalmente considerado.

- Octava hipótesis nula: No existe una relación significativa entre el nivel de logro en el aprendizaje de la Geometría y el conjunto de variables conformado por el sexo del estudiante, su procedencia rural o urbana y su nivel de desarrollo del pensamiento lógico-matemático considerado en cada una de las seis escalas de Shatnawi: generalización, deducción, inducción, uso de símbolos y lenguaje matemático, razonamiento lógico y demostración matemática.

- Novena hipótesis nula: No existe una relación significativa entre el nivel de logro en el aprendizaje del Álgebra y el conjunto de variables conformado por el sexo del estudiante, su procedencia rural o urbana y su nivel de desarrollo del pensamiento lógico-matemático globalmente considerado.

- Décima hipótesis nula: No existe una relación significativa entre el nivel de logro en el aprendizaje del Álgebra y el conjunto de variables conformado por el sexo del estudiante, su procedencia rural o urbana y su nivel de desarrollo del pensamiento lógico-matemático considerado en cada una de las seis escalas de Shatnawi: generalización, deducción, inducción, uso de símbolos y lenguaje matemático, razonamiento lógico y demostración matemática

- Undécima hipótesis nula: No existe una relación significativa entre el nivel de logro alcanzado por los estudiantes en el aprendizaje de las Matemáticas – integrando las dos áreas de conocimiento de Álgebra y Geometría – y el conjunto de variables conformado por el sexo del estudiante, su procedencia rural o urbana y su grado de desarrollo del pensamiento lógico-matemático globalmente considerado.

LAS FASES DEL ANÁLISIS

Se sabe que, independientemente de la complejidad de los datos disponibles y del procedimiento estadístico que se utilice, una exploración meticulosa previa de los datos obtenidos –ejecutada al inicio del análisis– es particularmente importante, pues permite identificar, entre otros aspectos, posibles errores tales como datos mal introducidos o respuestas mal codificadas; valores extremos que merezcan un trato especial por el efecto eventualmente distorsionador que podría provocar su significativo alejamiento; pautas extrañas en los datos, como valores que se repiten demasiado o que no aparecen; y variabilidad no esperada.

Por esta razón, como primera fase – previa al análisis stricto sensu – después de que fueron recogidos y tabulados los datos procedentes de los cuestionarios aplicados a los estudiantes, se procedió a realizar la revisión y depuración de los datos recolectados para, con ello, asegurar su exactitud. La depuración de los datos incluyó la eliminación de errores de digitación o grabación, la decisión de excluir a los treinta y siete estudiantes que realizaron la prueba de valoración del DPLM pero que luego no se presentaron a la prueba nacional de Bachillerato en Matemáticas, o la decisión referente al tratamiento de los casos sin respuesta en una o varias variables de la investigación.

LOS INSTRUMENTOS DE MEDICIÓN: RESULTADOS, CONFIABILIDAD Y VALIDEZ

En este apartado se presenta una visión global –adicional a la ya esbozada en el capítulo anterior– de los instrumentos empleados para medir, por una parte, el desarrollo del pensamiento lógico-matemático (DPLM) y, por otra, el nivel de logro en el aprendizaje en Matemática (NLAM). Esta visión incluye la descripción de los resultados obtenidos por los estudiantes en cada una de las pruebas y la discusión en torno a la confiabilidad, nociones sobre el constructo y validez de contenido de éstas.

EN TORNO AL INSTRUMENTO PARA MEDIR EL DPLM

Este test, como fue ya dicho en el capítulo anterior, constó de 24 ítems agrupados en seis sub-tests de cuatro ítems cada uno. Con cada sub-test se procuró medir el desarrollo del pensamiento lógico-matemático de los estudiantes en cada una de las seis "Escalas de Shatnawi" para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático que fueron descritas en el capítulo anterior y que son las más frecuentemente empleadas en los análisis internacionales más reconocidos sobre esta temática, a saber:

- Generalización (G),
- Inducción (I),
- Deducción (D),
- Uso de símbolos (S),
- Razonamiento lógico (R) y
- Demostración matemática (P).

CONFIABILIDAD DEL TEST PARA MEDIR EL DPLM

Puesto que esta prueba, cuyo propósito fue medir el nivel de desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico-matemático, fue construida sobre la base de las seis "Escalas de Shatnawi" puede afirmarse que, en la práctica, esta estuvo realmente conformada por seis sub-tests de cuatro ítems cada uno, diseñados de forma tal que cada sub-test debía cubrir una significativa gama de habilidades referentes a una de las seis escalas.

En consecuencia –como era de esperar– la confiabilidad individual de cada uno de los seis sub-tests que constituyeron la prueba fue baja (Ver anexo N° 5); sin embargo, es sumamente importante y de particular relevancia destacar que la consistencia interna de la prueba, considerada integralmente, fue muy satisfactoria –se analizó esta mediante el coeficiente alfa de Cronbach–, pues arrojó un valor de 0,819 lo que implica que sustenta la interpretación de los resultados del instrumento. En otras palabras, implica que la información obtenida contribuyó al proceso de validación de contenido del instrumento y que, a la vez, permite realizar interpretaciones válidas de los resultados.

RESULTADOS OBTENIDOS EN LA PRUEBA DEL DPLM

Considerando la importancia que tiene en un proceso de análisis de datos el contar con la mayor información posible en torno a las características de cada una de las variables, en esta investigación se atendió este requerimiento mediante el cálculo, descripción y análisis de sus medidas de tendencia central y medidas de dispersión, así como el de la forma de distribución de los datos y los valores o puntuaciones obtenidas para cada variable, presentándolas no sólo en términos de las correspondientes matrices sino también mediante expresiones gráficas.

Las medidas contempladas incluyeron, para tendencia central: media aritmética, mediana y moda; para variabilidad: el rango, la desviación estándar y la varianza; y para distribución: sesgo, curtosis, mínimos y máximos.

Cabe señalar que, para un manejo más cómodo de la información y para un mejor análisis e interpretación de sus resultados, a los valores obtenidos por los estudiantes en la calificación de cada uno de los ítems del test de evaluación del desarrollo del pensamiento lógico-matemático se les hizo la conversión aritmética a valores equivalentes en una escala numérica de 0 a 10.

La tabla siguiente recoge los valores de las medidas de tendencia central, variabilidad y distribución de los resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba de desarrollo del pensamiento lógico-matemático (DPLM), tanto considerada globalmente como para cada uno de las seis “Escalas de Shatnawi”: generalización (G), inducción (I), deducción (D), uso de símbolos (S), pensamiento o razonamiento lógico (R) y demostración matemática (P).

Cuadro Nº 13

Resultados de la prueba de DPLM: tendencia central, variabilidad y distribución.

	G	I	D	S	R	P	DPLM
N° Estudiantes	**485**	**485**	**485**	**485**	**485**	**485**	**485**
Media aritmética	**5,799**	**5,050**	**4,697**	**4,997**	**3,620**	**4,361**	**4,754**
Mediana	**5,625**	**5,000**	**4,688**	**5,000**	**3,438**	**4,375**	**4,635**
Moda	**5,000**	**2,813**	**4,688**	**4,688**	**2,813**	**5,313**	**3.800**
Desviación estándar	**1,793**	**2,192**	**2,360**	**1,681**	**1,869**	**2,290**	**1,425**
Varianza	**3,216**	**4,804**	**5,568**	**2,824**	**3,495**	**5,245**	**2,029**
Sesgo	**0,199**	**-0,019**	**-0,071**	**-0,147**	**0,267**	**-0,048**	**0,187**
Curtosis	**-0,554**	**-0,845**	**-0,669**	**-0,451**	**-0,633**	**-0,680**	**-0,524**
Rango	**8,750**	**9,375**	**10,000**	**8,750**	**8,750**	**9,375**	**6,823**
Mínimo	**1,250**	**0,000**	**0,000**	**0,000**	**0,000**	**0,000**	**1,667**
Máximo	**10,000**	**9,375**	**10,000**	**8,750**	**8,750**	**9,375**	**8,490**
Suma	**2012,188**	**1752,188**	**1629,700**	**1733,958**	**1256,250**	**1513,125**	**1649,568**

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

DPLM: Desarrollo del pensamiento lógico-matemático
G: Generalización
I: Inducción
D: Deducción
S: Uso de símbolos
R: Razonamiento lógico
P: Demostración matemática

Como puede observarse, la media aritmética correspondiente a la valoración del desarrollo del pensamiento lógico-matemático en estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos fue preocupantemente baja: alcanzó apenas un valor de 4,754 en la escala de 0 a 10; y se obtuvo un valor muy cercano para la mediana de 4,635, en tanto que el valor modal obtenido fue aún menor, pues llegó a 3,80.

Por otra parte, el rango para los datos correspondientes a los resultados de los estudiantes en el test de valoración del pensamiento lógico-matemático fue de 6,823, en tanto que la medida de dispersión de los datos fue relativamente pequeña, con una desviación estándar de 1,425 lo que indica que los datos se agruparon en un vecindario o entorno de la media aritmética, con un radio medio de 1,425. La varianza, por su parte, fue de 2,029.

La distribución de estos datos mostró un máximo medio de 8,49 y un mínimo de 1,67. El análisis sobre cuán simétricamente se distribuyen los datos respecto al eje de simetría – alrededor del punto central – determinó un sesgo de 0,187 que es un valor ligeramente positivo que indicó que los valores se distribuyeron aproximadamente en la misma cantidad a ambos lados de la media con una ligera mayoría por encima del valor de esta.

Por su parte, el coeficiente negativo de curtosis en -0,524 indicó que la distribución de los datos para la prueba de desarrollo del pensamiento lógico-matemático conformó una curva platicúrtica, es decir, que la visión gráfica de su distribución correspondió a una curva que mostró ser más bien un tanto "plana" respecto a la curva normal, aunque cercana a esta, con no muchos de los casos acumulados en las colas de distribución normal, tal y como puede observarse en la figura siguiente:

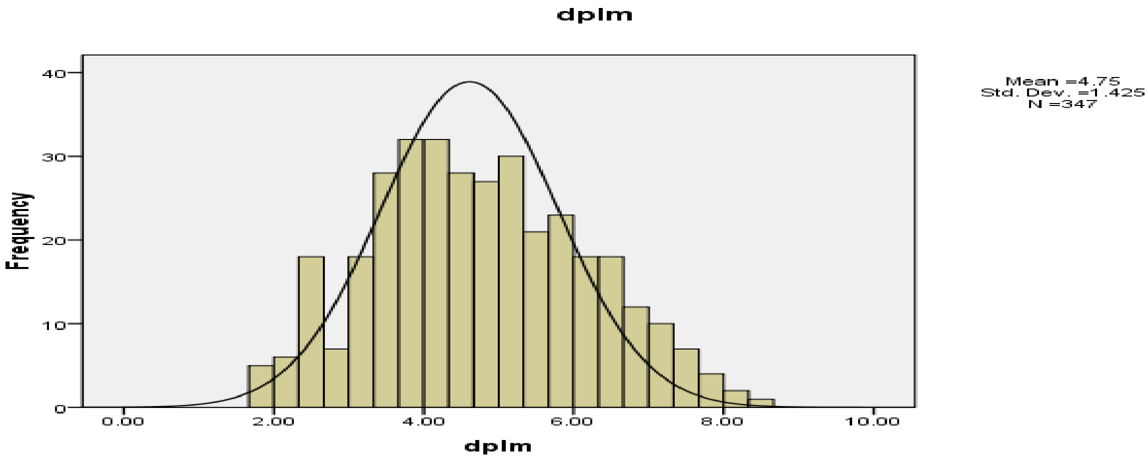


Figura Nº 8

Curva de distribución de los resultados de la prueba de DPLM

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

Por otra parte, al adentrarse en un análisis más pormenorizado, se encontró que los valores de las medias aritméticas y las medianas de cada una de las seis escalas del desarrollo del pensamiento lógico-matemático, consideradas individualmente, mostraron un comportamiento muy semejante no existiendo entre estos valores, en ningún caso, una diferencia mayor a 0,18. El valor de media aritmética más alto correspondió a la escala de "generalización" con 5,8 y el valor de media aritmética más bajo se encontró en la escala de desarrollo del "razonamiento lógico" con 3,6. Por tanto, existe entre ellos una significativa diferencia de 2,2 puntos.

En la escala de 0 a 10, las medias aritméticas de los resultados correspondientes al desarrollo del razonamiento lógico, deducción, uso de símbolos y demostración matemática no superaron los 5 puntos, en tanto que la media aritmética para la escala de inducción lo sobrepasó precariamente con un valor de 5,05. Por su parte, la media aritmética de resultados de la escala de generalización alcanzó un 5,8.

En cuanto a los datos más frecuentes, nuevamente los resultados correspondientes a la escala de razonamiento lógico cayeron al valor más bajo con una moda de 2,8, en tanto que generalización presentó una moda de 5,0. Se encontró una mayor acumulación de los datos alrededor de la media aritmética en las escalas correspondientes a "uso de símbolos", "generalización" y "razonamiento lógico", con los valores menores de la desviación estándar en ese orden ascendente. La mayor dispersión la presentó "deducción" seguida por "demostración matemática" con desviaciones estándar de 2,4 y 2,3 respectivamente.

Los resultados obtenidos en este test para cada una de las seis escalas del DPLM de Shatnawi mostraron coeficientes negativos de curtosis cuyos valores absolutos se encontraron en el intervalo abierto]0,451 , 0,845[lo que implicó que, en todas esas seis escalas del DPLM, los resultados obtenidos se distribuyeron en curvas platicúrticas, es decir, curvas más bien un tanto "planas" respecto a la curva normal y con no muchos casos acumulados en las colas de distribución normal. Un análisis individual y más detallado del comportamiento de los resultados obtenidos por los estudiantes en cada una de las seis escalas de Shatnawi, se ofrece seguidamente.

En la escala del desarrollo del pensamiento lógico-matemático correspondiente a "generalización" las medias aritméticas de los resultados obtenidos en cada uno de los ítems estuvieron comprendidas en un rango de 5,16 a 6,66 (en una escala de 0 a 10), con una media aritmética general para la escala completa de 5,78. Los ítems G-1 y G-2 mostraron una dificultad muy semejante con una diferencia de 0,61. El ítem que mostró mayor nivel de dificultad correspondió al cálculo del patrón de comportamiento de la sucesión 2n, mediante la obtención del algoritmo para el cálculo del término n-ésimo.

Cuadro Nº 14

Escala de generalización, estadísticos básicos por ítem y globalmente

	G-1	G-2	G-3	G-4	G
Media aritmética	**5,659**	**5,720**	**5,155**	**6,661**	**5,799**
Mediana	**5,000**	**5,000**	**5,000**	**7,500**	**5,625**
Moda	**5,000**	**5,000**	**5,000**	**10,000**	**5,000**
Desviación estándar	**3,266**	**2,717**	**2,552**	**3,370**	**1,793**
Mínimo	**,00**	**,00**	**,00**	**,00**	**1,25**
Máximo	**10,00**	**10,00**	**10,00**	**10,00**	**10,00**

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

G-1: Primer ítem correspondiente a la escala de generalización
G-2: Segundo ítem correspondiente a la escala de generalización
G-3: Tercer ítem correspondiente a la escala de generalización
G-4: Cuarto ítem correspondiente a la escala de generalización
G: Escala de generalización considerada globalmente

La curva de distribución de los datos correspondientes a los resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba de desarrollo del pensamiento lógico para esta escala de generalización, se muestra seguidamente:

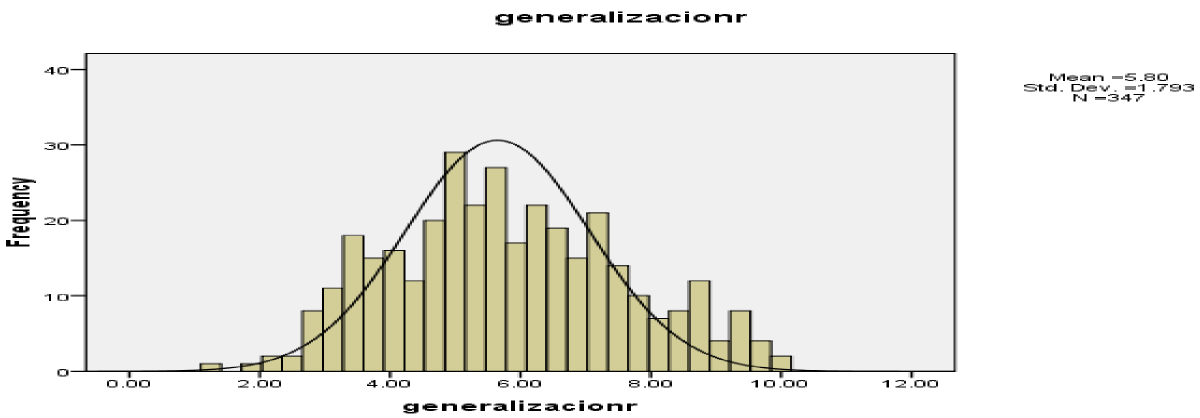


Figura Nº 9

Curva de distribución de los resultados de la prueba: escala generalización

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

En lo que respecta a los resultados obtenidos correspondientes a la escala de Shatnawi de "inducción", las medias aritméticas para cada uno de los ítems estuvieron comprendidas en un rango de 4,70 a 5,4 (en una escala de 0 a 10), con una media aritmética general para la escala completa igual a 5,1.

Los ítems I-1 e I-2 mostraron una dificultad prácticamente igual. El ítem que mostró mayor nivel de dificultad correspondió a aquel en el que los estudiantes debían hallar el octavo término de una serie, mediante la obtención y empleo de la relación que permite la determinación del término como doble del término inmediato anterior. Los resultados evidenciaron, además, que los estudiantes enfrentaron, con los ítems de esta escala de inducción, una mayor dificultad que con los de la escala de generalización.

La síntesis de estos resultados puede observarse en el siguiente arreglo matricial:

Cuadro Nº 15

Escala de inducción: estadísticos básicos por ítem y globalmente

	I-1	I-2	I-3	I-4	I
Media aritmética	5,058	5,032	4,697	5,411	5,050
Mediana	5,000	5,000	5,000	5,000	5,000
Moda	10,000	0,000	7,500	5,000	2,813
Desviación estándar	4,511	3,229	2,804	2,586	2,192
Mínimo	,00	,00	,00	,00	,00
Máximo	10,00	10,00	10,00	10,00	9,38

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

I-1: Primer ítem correspondiente a la escala de inducción
I-2: Segundo ítem correspondiente a la escala de inducción
I-3: Tercer ítem correspondiente a la escala de inducción
I-4: Cuarto ítem correspondiente a la escala de inducción
I: Escala de inducción considerada globalmente

La curva de distribución de los resultados obtenidos por los estudiantes para la escala de inducción se muestra en la gráfica siguiente:

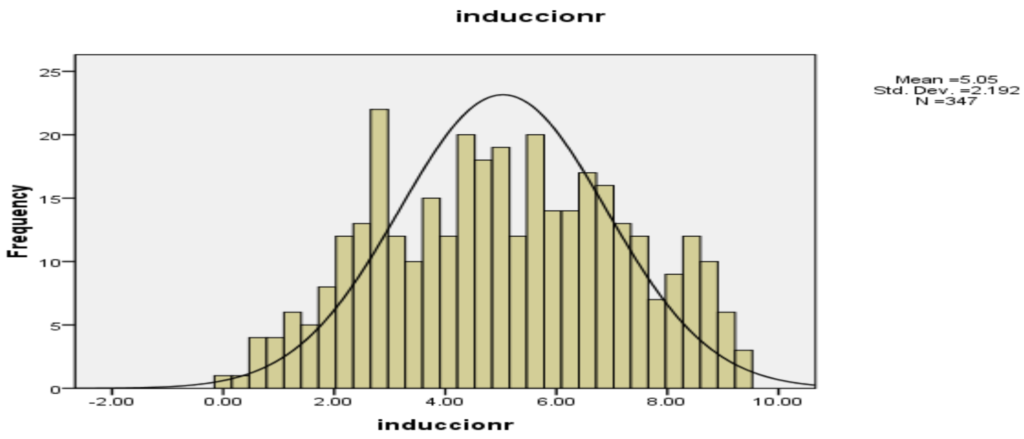


Figura Nº 10

Curva de distribución de los resultados de la prueba: escala inducción

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

El análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes en los ítems correspondientes a la escala de Shatnawi de deducción mostró que sus medias aritméticas están comprendidas en el intervalo cerrado [3,56, 5,88] (en una escala de 0 a 10), en tanto que la media aritmética general para esta escala completa fue de 4,70.

El ítem en el que los estudiantes encontraron mayor dificultad fue el D-2 que exigía que los alumnos pudiesen llegar a una conclusión correcta partiendo de dos premisas dadas. Por su parte, los ítems D-3 y D-4 de esta escala mostraron una dificultad muy semejante. El ítem D-1 fue el segundo más difícil con una diferencia relativamente pequeña en relación con D- 2. Como puede observarse, los resultados evidenciaron, además, que hubo una mayor dificultad de los estudiantes para responder correctamente los ítems de esta escala de deducción respecto a la mostrada para los de las escalas de generalización o de inducción.

El resumen de esta información se presenta en la tabla siguiente:

Cuadro Nº 16

Escala de deducción, estadísticos básicos por ítem y globalmente

	D-1	D-2	D-3	D-4	D
Media aritmética	**4,089**	**3,555**	**5,259**	**5,883**	**4,697**
Mediana	**3,750**	**1,250**	**6,250**	**7,500**	**4,688**
Moda	**0,000**	**0,000**	**0,000**	**10,000**	**4,688**
Desviación estándar	**3,729**	**3,932**	**3,798**	**3,917**	**2,360**
Mínimo	**,00**	**,00**	**,00**	**,00**	**,00**
Máximo	**10,00**	**10,00**	**10,00**	**10,00**	**10,00**

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

D-1: Primer ítem correspondiente a la escala de deducción
D-2: Segundo ítem correspondiente a la escala de deducción
D-3: Tercer ítem correspondiente a la escala de deducción
D-4: Cuarto ítem correspondiente a la escala de deducción
D: Escala de deducción considerada globalmente

Para esta escala, la curva de distribución de los datos correspondientes a los resultados obtenidos por los estudiantes se muestra seguidamente:

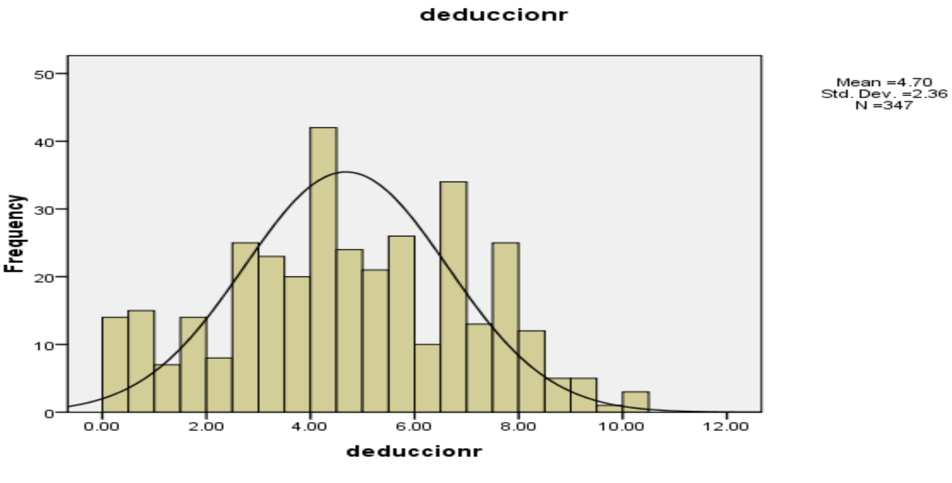


Figura Nº 11

Curva de distribución de los resultados de la prueba: escala deducción

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

Al considerar los resultados correspondientes a la escala de Shatnawi de desarrollo del pensamiento lógico-matemático referente a “uso de símbolos”, se encontró que las medias aritméticas de los resultados obtenidos por los estudiantes en cada uno de los ítems están comprendidos en un rango de 4,53 a 5,56 (en una escala de 0 a 10), con una media aritmética general de 5,00 para el componente completo.

Todos los ítems que conformaron la evaluación de este componente mostraron un nivel de dificultad muy semejante con diferencias que apenas, en un caso particular, superaron el 1,0. El ítem S-2, que exigía a los estudiantes usar símbolos matemáticos para determinar la solución de un problema algebraico de una variable, fue el que mostró el mayor grado de dificultad. Como visión general de esta escala se puede afirmar que, considerada integralmente, mostró ser moderadamente difícil y muy similar en ello a generalización e inducción, tal y como se evidencia en el resumen de información del cuadro siguiente.

Cuadro Nº 17

Escala de uso de símbolos y lenguaje matemático, estadísticos básicos por ítem y globalmente

	S-1	S-2	S-3	S-4	S
Media aritmética	**5,562**	**4,532**	**5,288**	**4,607**	**4,997**
Mediana	**5,000**	**5,000**	**5,000**	**5,000**	**5,000**
Moda	**10,000**	**5,000**	**5,000**	**5,000**	**4,688**
Desviación estándar	**3,302**	**2,650**	**2,743**	**3,177**	**1,681**
Mínimo	**,00**	**,00**	**,00**	**,00**	**,00**
Máximo	**10,00**	**10,00**	**10,00**	**10,00**	**8,75**

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

S-1: Primer ítem correspondiente a la escala de uso de símbolos y lenguaje matemático
S-2: Segundo ítem correspondiente a la escala de uso de símbolos y lenguaje matemático
S-3: Tercer ítem correspondiente a la escala de uso de símbolos y lenguaje matemático
S-4: Cuarto ítem correspondiente a la escala de uso de símbolos y lenguaje matemático
S: Escala de uso de símbolos y lenguaje matemático considerada globalmente

Los resultados obtenidos por los estudiantes en los ítems correspondientes a esta escala de Shatnawi de uso de símbolos se distribuyeron gráficamente según la curvas que se muestran en la siguiente figura:

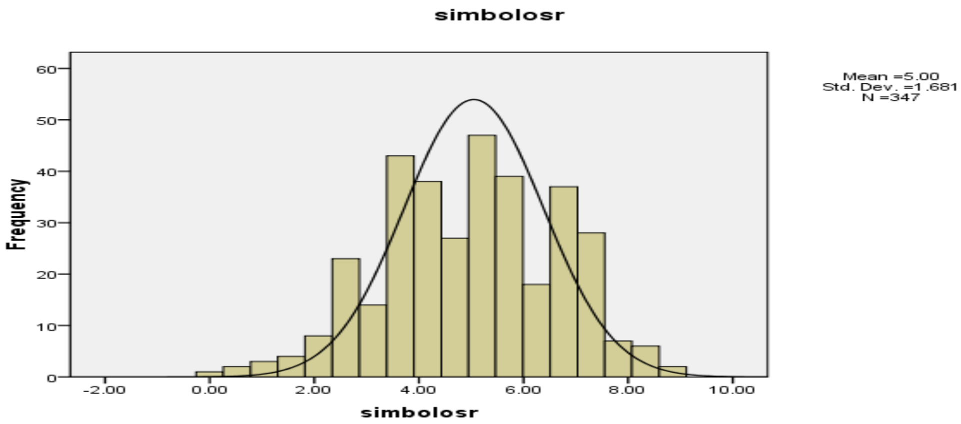


Figura Nº 12
Curva de distribución de los resultados de la prueba: escala de uso de símbolos y lenguaje matemático

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

Considerando los bajos resultados obtenidos por los estudiantes, fue de particular importancia el análisis de la escala de Shatnawi del desarrollo del pensamiento lógico-matemático correspondiente a “razonamiento lógico”. En ella, las medias aritméticas de los resultados obtenidos en cada uno de los ítems estuvieron comprendidas en un preocupante rango de 3,39 a 3,75 (en una escala de 0 a 10), con una media aritmética general de 3,62 para la escala completa.

Esta escala de razonamiento lógico fue claramente aquella en la que los estudiantes hallaron mayor nivel de dificultad, con diferencias muy significativas en relación con las de generalización, inducción, deducción y uso de símbolos. Un poco más cercanos a los resultados obtenidos en los ítems de esta escala estuvieron, como era de esperar, los correspondientes a la escala de Shatnawi de demostración matemática.

Todos los ítems que conformaron la evaluación de esta escala de razonamiento lógico mostraron un nivel de dificultad muy semejante, con diferencias que no superan el 0,36. Analizados en el marco global del test, todos los ítems de esta escala de razonamiento lógico mostraron el más alto nivel de dificultad de todo el test. Incluso el ítem de esta escala de razonamiento lógico en el que los estudiantes encontraron menor nivel de dificultad apareció como más difícil que cualquiera de los ítems de las otras escalas de Shatnawi incluidas en el test. El arreglo matricial siguiente resume las características de los resultados obtenidos.

Cuadro Nº 18

Escala de razonamiento lógico, estadísticos básicos por ítem y globalmente

	R-1	R-2	R-3	R-4	R
Media aritmética	**3,390**	**3,750**	**3,660**	**3,700**	**3,620**
Mediana	**2,500**	**3,750**	**3,750**	**3,750**	**3,438**
Moda	**2,500**	**0,000**	**0,000**	**0,000**	**2,813**
Desviación estándar	**2,292**	**2,969**	**2,932**	**3,092**	**1,869**
Mínimo	**,00**	**,00**	**,00**	**,00**	**,00**
Máximo	**10,00**	**10,00**	**10,00**	**10,00**	**8,75**

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

R-1: Primer ítem correspondiente a la escala de razonamiento lógico
R-2: Segundo ítem correspondiente a la escala de razonamiento lógico
R-3: Tercer ítem correspondiente a la escala de razonamiento lógico
R-4: Cuarto ítem correspondiente a la escala de razonamiento lógico
R: Escala de razonamiento lógico considerada globalmente

Para esta escala, la curva de distribución de los datos correspondientes a los resultados obtenidos por los estudiantes se muestra seguidamente:

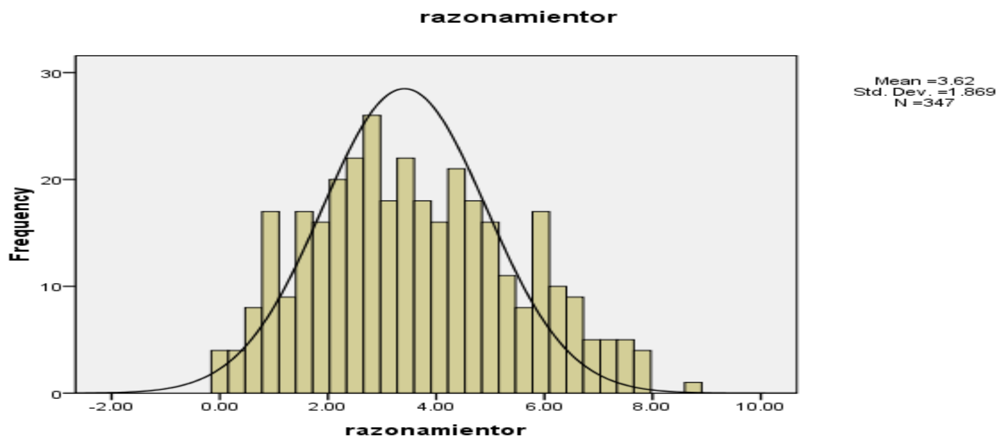


Figura Nº 13

Curva de distribución de los resultados de la prueba: escala razonamiento lógico

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

Finalmente, el análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes en los ítems correspondientes a la escala de Shatnawi de "demostración matemática", mostraron que sus medias aritméticas oscilaron en un rango de 3,95 a 4,82 (en una escala de 0 a 10), con una media aritmética general de 4,36 para la escala completa.

Esta escala del desarrollo del pensamiento lógico-matemático apareció como la segunda de mayor dificultad en el test y relativamente cercana a la escala de razonamiento lógico. Todos los ítems correspondientes a esta escala mostraron un nivel de dificultad muy semejante, con una diferencia máxima entre ellos no mayor a 0,87. El ítem P-2, que apareció como el de mayor dificultad, requería de los estudiantes que emplearan teoremas previos, enlazaran estas proposiciones y justificaran formalmente los pasos de su razonamiento para demostrar la proposición planteada.

El resumen de las características de los resultados obtenidos por los estudiantes en esta escala se muestra en el cuadro siguiente:

Cuadro Nº 19

Escala de demostración matemática, estadísticos básicos por ítem y globalmente

	P-1	P-2	P-3	P-4	P
Media aritmética	**4,189**	**3,952**	**4,481**	**4,820**	**4,361**
Mediana	**5,000**	**3,750**	**5,000**	**5,000**	**4,375**
Moda	**0,000**	**0,000**	**0,000**	**0,000**	**5,313**
Desviación estándar	**3,717**	**3,578**	**3,532**	**3,332**	**2,290**
Mínimo	**,00**	**,00**	**,00**	**,00**	**,00**
Máximo	**10,00**	**10,00**	**10,00**	**10,00**	**9,38**

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

P-1: Primer ítem correspondiente a la escala de demostración matemática
P-2: Segundo ítem correspondiente a la escala de demostración matemática
P-3: Tercer ítem correspondiente a la escala de demostración matemática
P-4: Cuarto ítem correspondiente a la escala de demostración matemática
P: Escala de demostración matemática considerada globalmente

Para esta escala, la curva de distribución de los datos correspondientes a los resultados obtenidos por los estudiantes se muestra seguidamente:

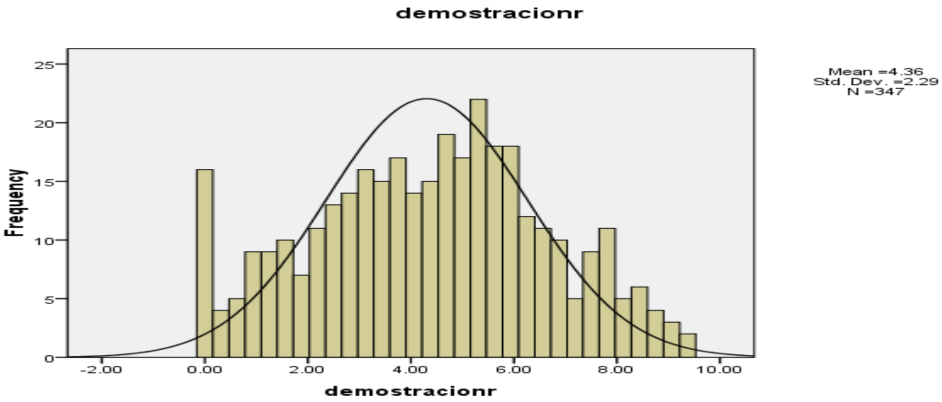


Figura Nº 14
Curva de distribución de los resultados de la prueba: escala demostración matemática

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

Además de esta información global referente a los resultados obtenidos por todos los 485 estudiantes que conformaron la muestra, fue de interés el análisis separado de esos resultados considerando sexo y zona de procedencia de los alumnos.

Por esta razón, la descripción de resultados se desagregó considerando, por una parte, los subconjuntos formados por los estudiantes-varones y el constituido por las estudiantes-mujeres y, por otra parte, los subconjuntos de estudiantes provenientes de zonas urbanas y los estudiantes provenientes de zonas rurales, distribuidos según se indica en el siguiente cuadro:

Cuadro Nº 20
Distribución de estudiantes por sexo y zona de procedencia

Estudiantes	Rural	Urbano	TOTAL
Varones	**97**	**151**	**248**
Mujeres	**92**	**145**	**237**
TOTAL	**189**	**296**	**485**

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

El cuadro siguiente recoge la información básica sobre medias aritméticas y desviaciones estándar de los resultados obtenidos por los estudiantes de undécimo año de los colegios académicos diurnos incluidos en la muestra, para cada uno de los subgrupos, femenino y masculino, en la prueba de desarrollo del pensamiento lógico-matemático integralmente considerada y en cada uno de las seis escalas de Shatnawi: generalización, inducción, deducción, uso de símbolos y lenguaje matemático y demostración matemática.

Cuadro Nº 21

Medias aritméticas y desviaciones estándar por sexo del estudiante y escalas de Shatanawi

SEXO		DPLM	G	I	D	S	R	P
FEMENINO	Media aritmética	4,715	5,713	4,977	4,675	4,928	3,637	4,361
	Número estudiantes	237	237	237	237	237	237	237
	Desviación estándar	1,432	1,840	2,147	2,371	1,722	1,842	2,386
MASCULINO	Media aritmética	4,784	5,865	5,106	4,713	5,051	3,607	4,361
	Número estudiantes	248	248	248	248	248	248	248
	Desviación estándar	1,421	1,758	2,230	2,357	1,650	1,895	2,219
TOTAL	Media aritmética	4,754	5,799	5,050	4,697	4,997	3,620	4,361
	Número estudiantes	485	485	485	485	485	485	347
	Desviación estándar	1,425	1,793	2,192	2,360	1,681	1,869	2,290

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

DPLM: Desarrollo del pensamiento lógico matemático integralmente considerado
G: Desarrollo del pensamiento lógico matemático en la escala de generalización
I: Desarrollo del pensamiento lógico matemático en la escala de inducción
D: Desarrollo del pensamiento lógico matemático en la escala de deducción
S: Desarrollo del pensamiento lógico matemático en la escala de uso de símbolos y lenguaje matemático
G: Desarrollo del pensamiento lógico matemático en la escala de razonamiento lógico
G: Desarrollo del pensamiento lógico matemático en la escala de demostración matemática

Como puede observarse en la tabla anterior, las medias aritméticas de los estudiantes-varones superaron ligeramente a las estudiantes-mujeres tanto en la prueba considerada integralmente como en las escalas de Shatnawi de generalización, inducción, deducción y uso de símbolos. En la escala correspondiente a demostración matemática, la media aritmética obtenida por ambos subgrupos fue igual y, en el caso de razonamiento lógico, las estudiantes-mujeres obtuvieron resultados que superaron ligeramente a los obtenidos por los estudiantes-varones. Cabe señalar que las diferencias en estas medias aritméticas fueron poco significativas y, en todos los casos, menores o iguales que 0,142. La mayor diferencia se encontró en generalización y la menor – igual a cero – se encontró en demostración matemática.

El análisis de las desviaciones estándar que se registran en el cuadro anterior evidenció una similitud tal que corresponde señalar que, en todos los casos, los resultados de la prueba de pensamiento lógico-matemático integralmente considerada, así como los resultados obtenidos en cada uno de los componentes, mostró acumulaciones muy semejantes de datos alrededor de las respectivas medias aritméticas, tanto en el caso de las estudiantes-mujeres como en el de los estudiantes-varones.

Finalmente, los datos correspondientes a los resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba de pensamiento lógico, tanto integralmente considerada como en cada uno de sus componentes, requirieron análisis separados en dos subgrupos según la localización del colegio del que proviene el estudiante incluido en la muestra estudiada. De esta manera, el cuadro siguiente muestra la información básica sobre medias aritméticas y desviaciones estándar del subgrupo de estudiantes de zona rural y del subgrupo de estudiantes de zona o localización urbana.

Cuadro Nº 22

Medias aritméticas y desviaciones estándar por zona de procedencia del estudiante y escalas de Shatanawi

ZONA		DPLM	G	I	D	S	R	P
RURAL	Media aritmética	4,657	5,823	4,855	4,662	4,890	3,490	4,222
	Número estudiantes	189	189	189	189	189	189	189
	Desviación estándar	1,474	1,824	2,282	2,414	1,772	1,835	2,328
URBANO	Media aritmética	4,851	5,775	5,246	4,731	5,104	3,752	4,500
	Número estudiantes	296	296	296	296	296	296	296
	Desviación estándar	1,371	1,766	2,085	2,310	1,581	1,900	2,250
TOTAL	Media aritmética	4,754	5,799	5,050	4,697	4,997	3,620	4,361
	Número estudiantes	485	485	485	485	485	485	347
	Desviación estándar	1,425	1,793	2,192	2,360	1,681	1,869	2,290

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

DPLM: Desarrollo del pensamiento lógico matemático integralmente considerado
G: Desarrollo del pensamiento lógico matemático en la escala de generalización
I: Desarrollo del pensamiento lógico matemático en la escala de inducción
D: Desarrollo del pensamiento lógico matemático en la escala de deducción
S: Desarrollo del pensamiento lógico matemático en la escala de uso de símbolos y lenguaje matemático
R: Desarrollo del pensamiento lógico matemático en la escala de razonamiento lógico
P: Desarrollo del pensamiento lógico matemático en la escala de demostración matemática

El análisis de los resultados globales de la prueba de valoración del desarrollo del pensamiento lógico matemático mostró en su rendimiento una media aritmética ligeramente superior para los estudiantes de zona urbana, 4,85 en la escala numérica de 0 a 10, contra un 4,65 de los estudiantes de la zona rural. Un comportamiento similar se encontró en las escalas de Shatnawi de inducción, deducción, uso de símbolos, razonamiento lógico y demostración matemática, aunque no así en la escala de generalización, en la que el resultado promedio de los estudiantes de la zona rural, correspondiente al 5,82, superó la media aritmética de los resultados de los estudiantes de zona urbana que correspondió al 5,78

VALIDEZ DE LAS RESPUESTAS DADAS AL TEST PARA MEDIR EL DPLM

Como fue ya descrito *in extenso* en el capítulo anterior, para procurar la validez de contenido de esta prueba de DPLM, el investigador seleccionó los ítems que la conformaron de tests estandarizados de calidad internacionalmente reconocida, diseñados para medir desarrollo de pensamiento lógico-matemático en estudiantes de último año de Educación Media y teniendo como parámetros orientadores tanto su definición como las características de las seis escalas de pensamiento lógico de Shatnawi.

El instrumento inicial así construido fue luego sometido a un proceso de validación por un conjunto de seis jueces, profesores de Educación Media, poseedores de una formación académica universitaria de Licenciatura y Bachillerato en la Enseñanza de las Matemáticas y con una experiencia docente no menor a diez años.

La tarea cumplida por estos jueces consistió básicamente en determinar que los ítems fueran altamente congruentes con los elementos de cada una de las seis escalas del desarrollo del pensamiento lógico-matemático de Shatnawi y que, consecuentemente, midiesen el dominio específico del contenido que se procuraba medir, considerando particularmente las características de los estudiantes costarricenses a quienes se aplicaría la prueba y los propósitos particulares de esta. También se obtuvo de estos jueces criterio sobre la calidad de los ítems: estructura, relación del enunciado y las opciones en los casos que correspondía, forma, pertinencia de los dibujos, gráficos o figuras, y estimación de la dificultad “a priori” de cada ítem, entre otros.

Después de hecha la validación por el conjunto de los seis jueces, con base en la síntesis de los criterios expresados y de un cruce hecho por el investigador de la información brindada por cada uno, se replanteó el instrumento reduciéndolo a 24 ítems –cuatro para cada escala de pensamiento lógico-matemático de Shatnawi– lo que implicó una depuración del instrumento en cuanto a una mayor precisión y una adecuada reducción de su tamaño, además de la eliminación de errores en el lenguaje y la incorporación de elementos de correcta redacción en castellano, según lo señalado por una especialista en Filología española.

Finalmente, el instrumento se aplicó a dos grupos de estudiantes de undécimo año de colegios académicos diurnos – cuarenta y tres estudiantes en total – uno de ellos ubicado en zona urbana y el otro en zona rural, procurando – hasta donde esto fue posible – que en ambos grupos existiera un número muy semejante de hombres y de mujeres. Como resultado de esta tarea se procedió a omitir o modificar la forma de algunos ítems en razón de la incomprensión evidenciada por los estudiantes, el nivel de dificultad del ítem o bien el grado de discriminación de éste que mostró ser muy bajo o muy alto. También se incorporaron cambios significativos tanto en las indicaciones dirigidas a los estudiantes e incluidas en el test, como en el instructivo escrito y dirigido a quienes serían los responsables posteriores de aplicar la prueba.

Por lo tanto, la estructura y forma final de la prueba fue producto de experiencias internacionales anteriores de reconocida calidad, del criterio formal de especialistas y de la administración previa de la prueba a dos grupos de estudiantes.

Con el propósito de que el instrumento midiese el nivel de desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico-matemático, el test se construyó –como ya ha sido descrito in extenso en el capítulo anterior– sobre la base de las seis “Escalas de Shatnawi” de forma tal que cada uno de los ítems midiese en una de esas seis escalas.

El grado en que se logró efectivamente este objetivo fue analizado empleando la técnica de análisis factorial, tanto de carácter exploratorio como confirmatorio, con el fin de determinar si –dadas las características de los resultados obtenidos por los estudiantes– correspondía realizar una reducción de los datos usados para explicar las correlaciones entre las variables observadas, en relación con un número menor de variables no-observadas o "factores".

El análisis factorial exploratorio se empleó para indagar la estructura interna de las variables y determinar si existían factores asociados a grupos de variables, empleando para ello las "*cargas*" de los posibles factores con el fin de decantar la relación de estos con las distintas variables. Por otra parte, el análisis factorial confirmatorio se utilizó para explorar las relaciones entre el conjunto de los resultados obtenidos por los estudiantes en las escalas comprendidas en los ítems del test –considerados como indicadores o variables observadas– y el DPLM o el NLAM considerados como variables latentes o factores. Es importante destacar que a diferencia de lo hecho al aplicar el análisis factorial exploratorio, en el caso de análisis confirmatorio se establecieron de antemano los aspectos relevantes del modelo, escalas de Shatnawi, con base en la teoría que las sustenta y la evidencia conocida gracias a otros estudios internacionales realizados en este campo.

Los resultados del estudio en el que se empleó la técnica de análisis factorial exploratorio con una rotación de Varimax mostraron que, en general, cada uno de los ítems cargó en un único factor o escala de Shatnawi, de manera que estos resultados constituyeron un dato del proceso de valoración del constructo que permite la realización de interpretaciones válidas. Sin embargo, algunos ítems también mostraron un peso factorial en otras escalas con una carga o ponderación superior a 0,3.

Tal es el caso del segundo ítem del componente de generalización que también cargó en la escala de uso de símbolos; sin embargo, cabe señalar para este caso que algunos aspectos de la generalización y del uso de símbolos están estrechamente relacionados, como sucede en este ítem en el que el problema matemático de determinación de un patrón obliga al estudiante a emplear símbolos matemáticos (números) para generalizar y poder completar el espacio correspondiente a la igualdad enésima para el valor de $(n+1)^2 – n^2$.

Una situación análoga *–mutatis mutandi–* se encontró en el cuarto ítem del componente de generalización que también cargó en la escala correspondiente a razonamiento o pensamiento lógico. El problema matemático que se planteó en este ítem exigía al estudiante conocer el concepto de número real cuadrado perfecto y, a la vez, requería la noción del resultado del producto binomial que conduce al resultado conocido como tercera fórmula notable. Estos dos conceptos son nociones lógicas y su manejo exige razonamiento lógico.

Una circunstancia análoga se produjo con el primer ítem de la escala de razonamiento lógico que cargó en la escala de demostración matemática; el problema que planteaba requería el empleo de la transitividad de la relación "mayor que", considerada como una relación de orden estricto e implicaba el manejo de premisas en una sucesión de conclusiones que se deben ligar en un proceso de prueba matemática.

El tercer ítem de uso de símbolos cargó también en la escala de demostración matemática pues contiene conceptos de Geometría Analítica, tales como recta y pendiente, que se suman al uso de los símbolos necesarios para la determinación de la ecuación de la recta. Adicionalmente, el segundo ítem de uso de símbolos cargó en la escala de generalización pues ambos están estrechamente ligados, ya que el estudiante debe analizar las características del cuadrado y hallar $(x+2)^2$ por lo que algunos alumnos hicieron uso de valores numéricos específicos en lugar del manejo de la incógnita, para obtener el resultado siguiendo una vía de generalización en su respuesta.

Los anteriores elementos se muestran en la siguiente tabla que evidencia la carga de cada ítem en cada una de las escalas, en los casos en los que el valor correspondiente es mayor que 0,25. Es particularmente importante destacar que cuando se consideró cada escala individualmente se determinó con certeza que cada ítem cargaba significativamente en la escala correspondiente por lo que cada uno de ellos mide satisfactoriamente la escala respectiva.

Cuadro Nº 23

Análisis factorial exploratorio para la prueba de desarrollo *del pensamiento lógico-matemático.*

	Componentes					
	P	I	D	S	R	G
P-4	0,617					
P-2	0,574					0,264
P-3	0,556		0,272			
R-1	0,535				0,361	
P-1	0,515					
S-3	0,440		0,252			
I-1		0,660		0,267		
I-3		0,572		0,278		
I-4	0,338	0,551				0,318
I-2		0,469			0,268	0,277
D-1			0,635			
D-4			0,621			
D-2			0,472			
D-3			0,454	0,311		
S-4				0,732		
S-1				0,548		0,370
G-2				0,297		
R-4					0,770	
R-3					0,751	
R-2	0,336				0,467	
G-3				0,282	0,315	0,266
G-1						0,577
G-4	0,327					0,454
S-2	0,302			0,291		0,322

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

DPLM: Desarrollo del pensamiento lógico matemático integralmente considerado
G: Desarrollo del pensamiento lógico matemático en la escala de generalización
I: Desarrollo del pensamiento lógico matemático en la escala de inducción
D: Desarrollo del pensamiento lógico matemático en la escala de deducción
S: Desarrollo del pensamiento lógico matemático en la escala de uso de símbolos y lenguaje matemático
R: Desarrollo del pensamiento lógico matemático en la escala de razonamiento lógico
P: Desarrollo del pensamiento lógico matemático en la escala de demostración matemática

Debido a que desde que se construyó la prueba de DPLM con base en tests estandarizados de calidad internacionalmente reconocida, diseñados para medir desarrollo de pensamiento lógico-matemático en estudiantes de último año de Educación Media, al aplicar el análisis factorial confirmatorio se sabía de antemano cuáles ítems debían medir qué escalas de Shatnawi y, consecuentemente, se contaba con suficiente conocimiento para plantear hipótesis en torno a la relación entre los indicadores y las dimensiones latentes. La aplicación de esta técnica de análisis factorial confirmatorio se realizó entonces para contrastar esas hipótesis y determinar si el número de factores obtenidos y sus "cargas" se correspondían, como se esperaba, con las variables correspondientes a las seis escalas del pensamiento lógico-matemático de Shatnawi.

Para el análisis factorial confirmatorio se empleó la metodología de modelación de ecuaciones estructurales SEM, implementada en el paquete LISREL 8.8, en la modalidad de Análisis Factorial Confirmatorio (Jöreskog & Sörbom, 1996-2001) con el fin de validar la estructura conceptual del cuestionario referente al DPLM. El paquete LISREL por sus siglas en inglés de Linear Structural Relations es un programa usado en el análisis de ecuaciones estructurales que fue diseñado en los años setenta por Karl Jöreskog y Dag Sörbom, profesores ambos de la Universidad de Uppsala, Suecia.

La idea que privó para realizar el análisis factorial confirmatorio consistió en analizar la estructura de covarianza en la base de datos que contiene las variables observadas y tratar de extraer evidencia de validez para afirmar que el modelo de medición coincide con la estructura conceptual postulada en las seis escalas de Shatanawi del pensamiento lógico-matemático.

En la figura siguiente se resumen los resultados del análisis factorial confirmatorio de la prueba de DPLM: covarianzas entre las variables latentes; líneas de influencia de DPLM y NLAM sobre las respectivas variables observadas; especificaciones de direccionalidad que señalan si cada una de las variables relacionadas mide o es un indicador de la dimensión a la que en teoría pertenecen y términos de error que son la influencia de fuentes de variabilidad única asociadas a cada variable observada.

.

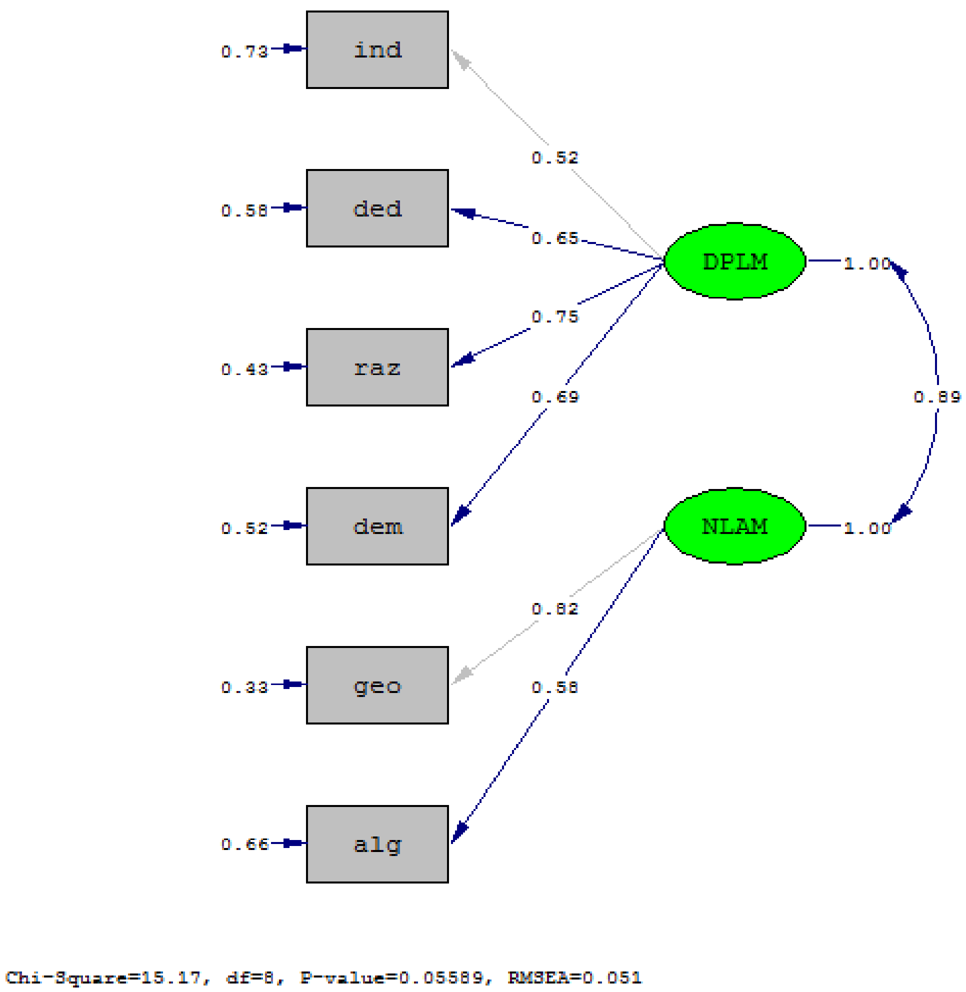


Figura Nº 15

Resultados del análisis factorial confirmatorio para la prueba de DPLM

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

Como puede observarse las cargas factoriales fueron altas, los coeficientes de regresión entre las variables DPLM y NLAM tuvieron signo positivo por lo que la relación entre estas y la observada fue directa, lo que significó que cuando la variable latente aumentaba una unidad, la variable observada también aumentaba según el peso del coeficiente. Por su parte, criterios de bondad de ajuste que determinaban la condición de aproximación entre el modelo conceptual (las seis escalas de Shatnawi) y las respuestas de los estudiantes fueron mínimos por lo que se pudo concluir que existió un ajuste entre aquel y estas; consecuentemente el modelo de medición y los datos observados ajustaron entre sí.

En síntesis, los resultados del estudio de análisis confirmatorio también indican que, efectivamente, cada uno de los ítems cargó en un único factor o escala de Shatnawi, lo que da el sustento suficiente del proceso de valoración del constructo que permite la realización de interpretaciones válidas.

EN TORNO AL INSTRUMENTO PARA MEDIR EL NLAM

Como fue ya descrito *in extenso* en el capítulo anterior, para realizar la medición del rendimiento de los estudiantes de undécimo año de los colegios académicos diurnos de educación formal en los ámbitos del Álgebra y de la Geometría, se utilizaron las Pruebas Nacionales de Matemáticas de Bachillerato en la Educación Media que administró a todos ellos la Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad del Ministerio de Educación Pública en diciembre del 2011. Estas Pruebas Nacionales de Bachillerato fueron establecidas inicialmente en el Código de Educación de 1943 y suspendidas en 1974. A partir de 1988 las pruebas se restauraron con la finalidad de certificar el nivel de logro académico general del currículo nacional en los estudiantes egresados de la Educación Diversificada, último ciclo lectivo de la educación secundaria del sistema formal de Costa Rica

Para los efectos de esta investigación, de la Prueba Nacional de Bachillerato de Matemáticas 2011 sólo se consideraron los ítems correspondientes específicamente a las áreas de contenidos correspondientes a Álgebra y a Geometría (Ver anexo N° 6). Los restantes ítems contenidos en la prueba, correspondientes a otras áreas de conocimiento, no fueron objeto de análisis en este estudio.

En cuanto a la confiabilidad del test para medir el NLAM cabe señalar que, al igual que las otras pruebas nacionales de bachillerato, la prueba de Bachillerato de Matemáticas que se empleó en esta investigación correspondió al modelo con referencia a normas, asentado en el principio de la curva normal y en la discriminación entre los estudiantes en términos del nivel relativo de aprendizaje en diferentes áreas temáticas; de manera que sus resultados se pueden utilizar para certificar. La confiabilidad o fiabilidad se evidenció en la consistencia interna y en la estabilidad temporal de las puntuaciones. La primera definición recoge el grado de coincidencia existente entre los elementos que la componen y la estabilidad en el tiempo alude a la capacidad del instrumento para arrojar las mismas mediciones cuando se aplica más de una vez a los mismos sujetos. Para el caso que nos ocupa en esta investigación, los especialistas de la Dirección de Calidad del Ministerio de Educación utilizaron el modelo de Alfa de Cronbach para determinar la consistencia interna de las puntuaciones de la prueba, considerando que es el índice de confiabilidad que mejores condiciones reúne para este caso ya que indica el grado de consistencia interna de la prueba y resume aquellos factores asociados al error de medición.

RESULTADOS OBTENIDOS POR LOS ESTUDIANTES EN LA PRUEBA PARA MEDIR NLAM

Un análisis análogo al realizado con los datos obtenidos por los estudiantes en la prueba de evaluación del desarrollo del pensamiento lógico permitió construir una descripción de las características de los resultados obtenidos por los estudiantes en las áreas de Álgebra y Geometría.

La tabla siguiente recoge los valores de las medidas de tendencia central, variabilidad y distribución para los resultados obtenidos en la prueba de nivel de logro en el aprendizaje en Matemáticas (NLAM) –Prueba de Bachillerato de Matemáticas del año 2011- considerada tanto global como individualmente en cada una de sus dos áreas de contenido: Álgebra y Geometría. Cabe reiterar que de esta prueba sólo se consideraron –para los efectos de esta investigación– aquellos catorce ítems que correspondían específicamente a conocimientos del área de Álgebra y los nueve ítems que correspondían a conocimientos del área de Geometría

Al igual que se hizo en el caso del test de evaluación del desarrollo del DPLM, para un manejo más cómodo de la información y para un mejor análisis e interpretación de sus resultados, los valores obtenidos por los estudiantes en la calificación de cada uno de los ítems del test de NLAM se realizó una conversión aritmética a valores equivalentes pero en una escala numérica de 0 a 10.

Cuadro Nº 24

Prueba de nivel de logro en el aprendizaje en Matemáticas

Medidas de tendencia central, variabilidad y dispersión

	Álgebra	Geometría	NLAM
Media aritmética	5,928	6,238	6,083
Mediana	5,714	6,667	6,190
Moda	6,429	7,778	6,190
Desviación estándar	1,969	2,364	1,879
Varianza	3,876	5,589	3,529
Sesgo	-0,348	-0,626	-0,634
Curtosis	0,398	-0,117	0,716
Rango	10,000	10,000	10,000
Mínimo	0,000	0,000	0,000
Máximo	10,000	10,000	10,000
Suma	2057,143	2164,444	2110,794

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

NLAM: Nivel de logro aprendizaje de las Matemáticas

Los resultados mostraron que en la prueba para valorar el nivel de logro de aprendizaje en Matemáticas (NLAM) –específicamente en las áreas de contenido de Álgebra y Geometría– los estudiantes de undécimo año obtuvieron un nivel de logro apenas aceptable con una media aritmética global de 6,1 en una escala de 0 a 10, con valores iguales para la mediana y con una moda igual a 6,2.

La media aritmética obtenida por los estudiantes en el área de Geometría correspondió a 6,24 que fue un valor superior al obtenido en Álgebra que fue un 5,93. La diferencia a favor de los resultados en Geometría fue aún mayor al comparar los valores modales que, en esta área de conocimiento, correspondió al 7,78 en tanto que en Álgebra fue de 6,43. Sin embargo –con una desviación estándar de 2,36– los resultados obtenidos en Geometría mostraron una mayor dispersión que los obtenidos en Álgebra para los que la desviación estándar fue igual a 1,97.

En cuanto a la distribución de los resultados globales de NLAM – con valor máximo en 10 y valor mínimo en 0,00– se mostró un sesgo negativo de -0,634 que evidenció una mayor acumulación de datos a la izquierda del eje de simetría, alrededor del punto central, en tanto que el coeficiente positivo de curtosis en 0,716 indicó una distribución leptocúrtica de los datos con una importante concentración de estos alrededor de los valores centrales de la variable y, consecuentemente, una curva un tanto "puntiaguda" respecto al estándar, como se observa en la siguiente gráfica.

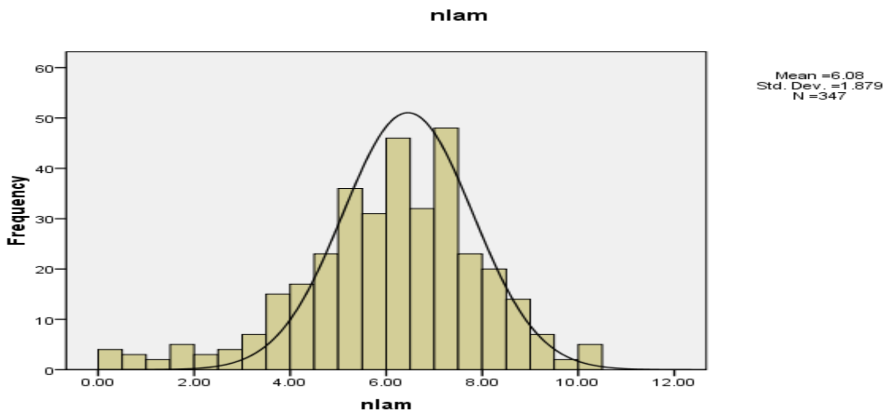


Figura Nº 16

Curva de distribución de los resultados de la prueba de NLAM

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

El análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes considerando en forma separada las áreas de contenidos de Geometría y de Álgebra mostró diferencias y similitudes importantes.

El análisis de los resultados de la prueba de NLAM en la área de conocimiento específica de Geometría –con un valor máximo de 10 y un valor mínimo de 0,00– en relación con la determinación de cuán simétricamente estos se distribuyen respecto al eje de simetría, mostró un sesgo negativo de -0,626 lo que implicó una distribución de los datos con una mayor acumulación a la izquierda del punto central que fue ligeramente menor que la correspondiente a los resultados del NLAM considerado globalmente.

Respecto a los datos correspondientes a los resultados obtenidos en los ítems del área de contenidos de Geometría, el análisis mostró una curtosis negativa de -0,117 con una consecuente ligera condición platicúrtica de la curva, suavemente plana respecto a la normal aunque cercana a ella, como puede observarse seguidamente:

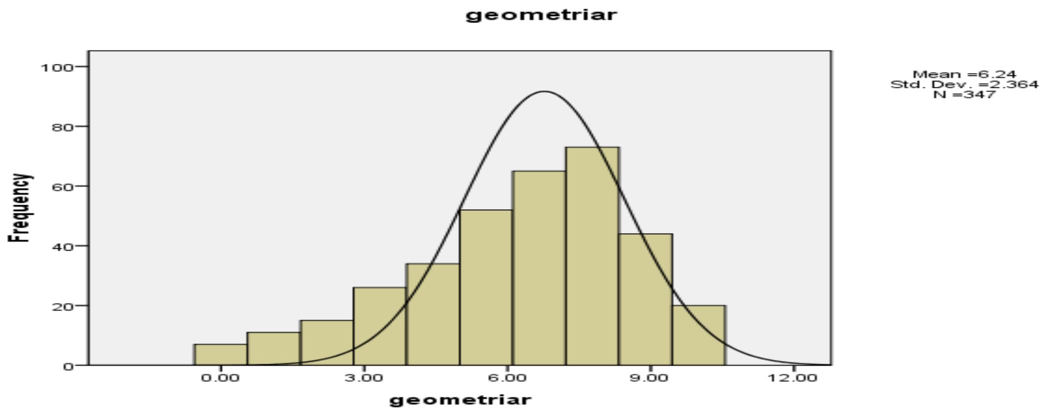


Figura Nº 17
Curva de distribución de los resultados de la prueba de NLAM: Geometría

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

Para el caso de los resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba de NLAM, específicamente en los ítems correspondientes a la área de contenidos de Álgebra –con valor mínimo de 0,00 y máximo de 10– los valores se encontraron distribuidos con una mayor acumulación a la izquierda del eje de simetría, para un sesgo negativo de -0,348 que correspondió a un valor menor que los sesgos – aunque también negativos – de los resultados de la área de contenido de Geometría y de los resultados de la prueba de NLAM globalmente considerada.

Además, la gráfica de distribución mostró una curtosis positiva de 0,4, el análisis señaló una concentración mayor de datos alrededor de los valores centrales y una curva que, como se puede observar en la figura apareció un tanto "puntiaguda" respecto a la curva de una distribución normal.

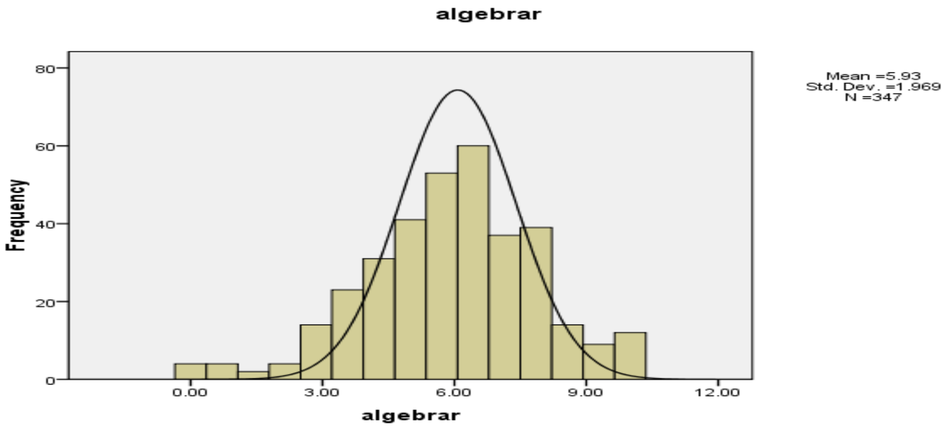


Figura Nº 18

Curva de distribución de los resultados de la prueba de NLAM: Álgebra

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

En relación con los resultados obtenidos en la prueba del nivel de logro en el aprendizaje de Matemáticas, NLAM, según sexo de los estudiantes se separó la información en dos subgrupos: el primero constituido por las 237 estudiantes-mujeres y el segundo por los 248 estudiantes-varones. El cuadro siguiente recoge la información básica sobre las medias aritméticas y las desviaciones estándar de cada uno de estos subgrupos en esta prueba de NLAM tanto integralmente considerada como en cada una de las dos áreas de contenido definidas para este estudio:

Cuadro Nº 25

Resultados obtenidos en la prueba de NLAM según sexo del estudiante

SEXO		NLAN	ALG	GEO
FEMENINO	Media aritmética	5,973	5,879	6,067
	Número estudiantes	237	237	237
	Desviación estándar	1,802	1,886	2,344
MASCULINO	Media aritmética	6,169	5,967	6,370
	Número estudiantes	248	248	248
	Desviación estándar	1,936	2,035	2,377
TOTAL	Media aritmética	6,083	5,928	6,238
	Número estudiantes	485	485	485
	Desviación estándar	1,879	1,969	2,364

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

La síntesis que recoge el cuadro anterior muestra resultados de la media aritmética de las 237 estudiantes mujeres que resultaron menores que los correspondientes valores obtenidos por el conjunto total de estudiantes, tanto en la prueba de NLAM globalmente considerado como en las dos áreas de contenido de Álgebra y de Geometría.

Como corolario de los resultados anteriores, se concluyó que los valores de la media aritmética de los resultados obtenidos por las estudiantes mujeres en la prueba de NLAM globalmente considerada, así como los resultados obtenidos por ellas en las áreas de contenido de Álgebra y Geometría fueron también ligeramente menores que los obtenidos por los estudiantes varones. Esta diferencia, relativamente menor, entre los resultados de las estudiantes mujeres y los estudiantes varones alcanzó su valor más alto en las respuestas a los ítems correspondientes a Geometría en las que, además, las desviaciones estándar fueron prácticamente iguales con una diferencia de apenas 0,03.

Por su parte, en Álgebra la diferencia entre los resultados obtenidos por ambos subgrupos fue menor que en Geometría, aunque destacó una dispersión levemente mayor de los datos para el caso de los estudiantes varones, con una desviación estándar de 2,035 en tanto que los resultados de las estudiantes mujeres mostraron una desviación estándar de 1,886

Un análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba tendiente a medir el nivel de logro de los estudiantes en el aprendizaje de las Matemáticas también contempló su disgregación en dos grupos según la zona en que se encuentra ubicado el colegio de procedencia de los alumnos: jóvenes de zona rural o jóvenes de zona urbana.

El cuadro siguiente ofrece una síntesis de la caracterización de los resultados obtenidos por cada uno de estos subgrupos:

Cuadro Nº 26

Resultados obtenidos en la prueba de NLAM según zona de procedencia del estudiante

ZONA		NLAM	ALG	GEO
RURAL	Media aritmética	6,110	6,039	6,181
	Número estudiantes	189	189	189
	Desviación estándar	1,924	2,052	2,351
URBANO	Media aritmética	6,056	5,818	6,294
	Número estudiantes	296	296	296
	Desviación estándar	1,837	1,881	2,382
TOTAL	Media aritmética	6,083	5,928	6,238
	Número estudiantes	485	485	485
	Desviación estándar	1,879	1,969	2,364

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

Como puede observarse, las medias aritméticas de los resultados de la prueba de NLAM globalmente considerada para el conjunto total de estudiantes y para los dos subgrupos en cuestión fueron prácticamente iguales, ya que fluctuaron en un entorno de 6,056 a 6,110, con una diferencia entre los subgrupos de estudiantes de zona rural y de zona urbana que apenas alcanza el 0,054.

El comportamiento fue semejante para los casos de los resultados en Álgebra y Geometría consideradas como áreas de contenido separadas, aunque cabe destacar que la media aritmética de 6,294 obtenida en Geometría por los 296 estudiantes de la zona urbana fue superior al 6,181 obtenido por los 189 estudiantes de la zona rural; en tanto que en el caso de Álgebra la relación se invirtió y fueron los estudiantes de la zona rural quienes, con un media aritmética de 6,039, superaron la media aritmética de 5,818 de los estudiantes de la zona urbana.

Por otra parte, las dispersiones de los datos para el caso de Geometría fueron muy semejantes para ambos subgrupos de zona rural y de zona urbana, con valores de desviación estándar de 2,351 y 2,382 respectivamente. No sucedió lo mismo en el caso de Geometría en el que los resultados de los estudiantes de la zona rural mostraron una dispersión mayor, con una desviación estándar de 2,052, en tanto que los resultados para los estudiantes de la zona urbana mostraron una desviación estándar de 1,811 que es un valor muy semejante al de la desviación estándar de los resultados de la prueba globalmente considerada para ese subgrupo, que presentó una desviación estándar de 1,837 y la del conjunto total de estudiantes, que fue de 1,879.

VALIDEZ DE LAS RESPUESTAS DEL TEST PARA MEDIR EL NLAM NLAM

Tal y como se señaló con detalle en el Capítulo Cuarto, la Prueba Nacional de Bachillerato de Matemáticas 2011 – que se empleó en esta investigación – se elaboró siguiendo el modelo de medición con referencia a normas y utilizó como obligado referente el Programa de Estudios definido por el Consejo Superior de Educación que es el que determina los objetivos y contenidos que se deben medir.

Para definir en esta prueba la distribución de los ítems para cada uno de los objetivos se contó –como se estila en todas las pruebas nacionales elaboradas por la Dirección de Gestión y Control de Calidad del Ministerio de Educación– con la participación de profesores de Matemáticas de todas las regiones del país que impartían en ese momento lecciones en el Ciclo Diversificado y a quienes, además, se le participó en una encuesta nacional tendiente a establecer la ponderación de los objetivos en la prueba con el fin de contar con un cuadro de balanceo fundamentado en la importancia relativa que los profesores dan, en promedio, a cada objetivo. Fue esa ponderación la que determinó el cálculo del número de ítems que fue necesario construir para cada uno de los objetivos.

La redacción de los ítems de esta prueba fue hecha por los especialistas de la Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad, apoyados por profesores de Matemáticas de Educación Media y respaldados con la posterior revisión de otros expertos que juzgaron la congruencia entre el ítem y el objetivo. El proceso así realizado, respalda la validez de contenido del instrumento que es condición esencial para garantizar la legitimidad en la interpretación de los resultados y para la toma de decisiones. Además (Barrantes et al., 2009*)*, para minimizar el error de medición producto de la aplicación de las pruebas, el test se ajustó a procesos estandarizados de confección, aplicación y calificación, en el marco de la teoría psicométrica de los test.

En síntesis, todos los ítems elaborados para esa prueba y empleados en esta investigación fueron sometidos a un proceso de validación fundado en el criterio especializado vertido sobre los diversos aspectos de interés por un grupo de tres a cinco jueces, a quienes correspondió analizar la relación entre el objetivo y el contenido del ítem, su forma y la pertinencia de los dibujos o gráficos, además de estimar a priori la dificultad de cada ítem. Con los ítems así juzgados, se montó la prueba respetando el cuadro de balanceo y los porcentajes de ítems por los tres niveles de dificultad definidos previamente: fáciles, intermedios y difíciles. Por último, cabe señalar que las pruebas montadas fueron revisadas por el Asesor Nacional de Matemáticas quien, cuando lo juzgó pertinente, sugirió modificaciones a ítems e incluso exclusiones de otros.

PRUEBAS DE HIPÓTESIS

Esta investigación tuvo como propósito fundamental aportar evidencia empírica en torno a la relación entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático de los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos –con base en las seis escalas de Shatnawi– y su nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas, considerado este en sus áreas de conocimiento algebraica y geométrica. La investigación se propuso, además, determinar si las diferencias entre la ubicación del colegio –urbano o rural– y el sexo del estudiante moderaban o no la relación entre el desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico-matemático y el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas.

Con ese objetivo, se formularon ocho interrogantes cuyo fin fue decantar el problema, clarificar sus dimensiones, allanar el planteamiento de la hipótesis y encauzar las actividades pertinentes para la investigación. Después de ello, se obtuvo toda la información que se estimó necesaria para procurar dar respuesta a esas ocho interrogantes y que fue descrita en los apartados anteriores de este capítulo.

Completadas esas tareas, se procedió a realizar los procedimientos necesarios para someter a prueba las hipótesis nulas que fueron planteadas en la investigación, con base en toda la información recolectada y ordenada. Esta tarea de prueba de hipótesis constituyó un elemento fundamental de la investigación por cuanto, como es conocido, en el contexto de la estadística inferencial, una hipótesis no es sino una proposición referida a uno o varios parámetros cuya congruencia con los datos obtenidos de la muestra debe ser necesariamente verificada.

Para una mejor comprensión de las decisiones adoptadas concernientes a la aceptación o rechazo de las hipótesis nulas, es importante señalar que en esta investigación –en aquellos casos en los que correspondió probar las hipótesis respecto a las medias obtenidas– se siguió el procedimiento de evaluación de la probabilidad de que la media de la muestra se encontrara o no cerca de la media de la distribución muestral, ya que esta última es prácticamente igual que el parámetro poblacional. Cuando esa probabilidad fue baja, la proposición no se generalizó a la población.

Por otra parte, siguiendo la decisión estadística que se estila en investigaciones como esta, se determinó, a priori, un valor de certeza, correspondiente al nivel de significancia, de 0,05 lo que implicó trabajar con una seguridad del 95% para generalizar y sólo un 5% en contra.

Seguidamente se presenta una síntesis de los resultados obtenidos como producto de los procesos de prueba de hipótesis nulas planteadas en esta investigación:

Primera hipótesis nula. No existe diferencia significativa en el desarrollo del pensamiento lógico-matemático –ni global ni individualmente considerado en cada una de las seis escalas de Shatnawi– entre los estudiantes costarricenses de undécimo año de zonas rurales y los de zonas urbanas

De ser cierta esta hipótesis, los resultados obtenidos en la prueba de DPLM por los estudiantes procedentes de zonas urbanas y los estudiantes procedentes de zonas rurales no habrían diferido significativamente.

Para determinar la aceptación o rechazo de esta hipótesis, se hizo un estudio en el que se aplicó la técnica estadística de análisis de varianza ANOVA –por las siglas en inglés de "analysis of variance– cuyo fin fue determinar en qué grado la variable independiente "localización", con sus dos posibilidades "rural" o "urbano", explicaba la variable dependiente "desarrollo del pensamiento lógico-matemático" considerado integralmente.

Posteriormente, en forma análoga y con el mismo fin, se aplicó también –*mutatis mutandi*– la técnica ANOVA para conocer el modo en que el valor medio de la variable de los resultados obtenidos en cada una de las seis escalas de Shatnawi, consideradas individualmente como variables dependientes, era afectado por los dos tipos diferentes de clasificación de los datos, rural o urbano, de la variable independiente "procedencia".

La estrategia para poner a prueba la hipótesis de igualdad de medias de los resultados de la prueba de DPLM consistió en obtener el estadístico "*F*", que reflejara el grado de parecido existente entre las medias que se estaban comparando de los grupos de estudiantes de procedencia urbana o de procedencia rural.

Este estadístico "*F*" corresponde al cociente cuyo numerador es una estimación de la varianza poblacional basada en la variabilidad existente entre las medias aritméticas de cada subgrupo –rural o urbano– y cuyo denominador es también una estimación de la varianza poblacional pero basada en la variabilidad existente dentro de cada subgrupo (rural o urbano). Cuanto más diferentes fueran las medias que se estaban comparando, tanto mayor sería el valor del estadístico "*F*".

Por otra parte, siguiendo lo que se estila en estos casos, se estableció "*a priori*" un valor de certeza correspondiente a un nivel de significancia de 0,05 lo que implicó contar con una seguridad del 95% para generalizar, y solamente un 5% en contra. De esta forma, se estableció como norma de esta investigación que si el nivel crítico asociado al estadístico "*F*" (nivel de significancia o nivel alfa) "*sig*", que corresponde a la probabilidad de obtener valores como el obtenido o mayores es menor que 0,05, se habría de proceder a rechazar la hipótesis de igualdad de medias, en este caso, para los grupos de estudiantes de procedencia urbana o de procedencia rural.

Los resultados del análisis del grado en el que la variable independiente "procedencia", con sus dos posibilidades "rural" o "urbano", explicaba la variable dependiente "desarrollo del pensamiento lógico-matemático", integralmente considerada, se recogen en el siguiente arreglo matricial en el que se consignan:

- una cuantificación de ambas fuentes de variación: "suma de cuadrados" ;
- los grados de libertad asociados a cada suma de cuadrados: "gl";
- el valor concreto adoptado para cada estimador de la varianza poblacional: medias cuadráticas. (que se obtienen dividiendo la suma de cuadrados entre sus correspondientes grados de libertad);
- el estadístico *F* que corresponde al cociente entre las dos medias cuadráticas;
- el nivel de significación correspondiente a la probabilidad de obtener valores como el obtenido o mayores bajo la hipótesis de igualdad de medias.

Cuadro Nº 27

Tabla de resumen del procedimiento ANOVA de un factor DPLM

		Sumas de cuadrados	gl	Medias cuadráticas	*F*	Sig.
DPLM * zona procedencia	Entre-grupos	3,271	1	3,271	1,615	,205
	Intra-grupos	698,918	345	2,026		
	Total	702,189	346			

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

Como puede observarse, la tabla anterior recoge una cuantificación de la variación que existió entre las medias de los dos grupos de estudiantes de procedencia rural y de estudiantes de procedencia urbana (variación entre-grupos) y la variación que existió entre las puntuaciones dentro de cada uno de esos dos grupos (variación intra-grupos), así como una cuantificación de ambas fuentes de variación (sumas de cuadrados), los grados de libertad asociados a cada suma de cuadrados (*gl*) y el valor concreto adoptado por cada estimador de la varianza poblacional (medias cuadráticas), siendo el cociente entre ellas el que proporcionó el valor del estadístico "*F*".

.

Considerando que el valor del nivel crítico o nivel de significancia fue, para este caso, igual a 0,205 y, consecuentemente, mayor que 0,05, fue preciso aceptar como válida esta parte de la hipótesis nula de igualdad de medias y, consecuentemente, concluir que no existió diferencia significativa en el grado de desarrollo del pensamiento lógico-matemático, globalmente considerado, entre los estudiantes costarricenses de undécimo año provenientes de zona rural y los provenientes de zona urbana.

Un procedimiento análogo se siguió para conocer el modo en que el valor medio de la variable de los resultados obtenidos en cada una de las seis escalas de Shatnawi, consideradas individualmente como variables dependientes, era afectado por los dos tipos diferentes de clasificación de los datos, rural o urbano, de la variable independiente "localización".

En este caso, al igual que lo actuado en el caso general en el que se consideró como variable independiente el desarrollo del pensamiento lógico-matemático integralmente, también se realizó un estudio en el que se aplicó la técnica estadística de análisis de varianza ANOVA con el fin de determinar en qué grado la variable independiente "procedencia", con sus dos posibilidades "rural" o "urbano", afectaba a cada una de las seis escalas de Shatnawi del pensamiento lógico-matemático, consideradas individualmente como variables dependientes.

También en este caso, la estrategia para poner a prueba la hipótesis de igualdad de medias de los resultados de la prueba de DPLM para cada una de sus seis escalas de Shatnawi, consideradas individualmente, consistió en obtener el estadístico "*F*", así como la cuantificación de la variación que existía entre las medias de los dos grupos de estudiantes de procedencia rural y de estudiantes de procedencia urbana (variación entre-grupos), la variación que existía entre las puntuaciones dentro de cada uno de esos dos grupos (variación intra-grupos) y la cuantificación de ambas fuentes de variación (sumas de cuadrados).

El estudio, en este caso, también consideró los grados de libertad asociados a cada suma de cuadrados (*gl*) y el valor concreto adoptado por cada estimador de la varianza poblacional (medias cuadráticas), siendo el cociente entre ellas el que proporcionó el valor del estadístico "*F*" para cada una de las escalas de Shatnawi, consideradas individualmente con el carácter de variables dependientes.

Los resultados del análisis del grado en que la variable independiente "localización", con sus dos posibilidades "rural" o "urbano", explicó como variables dependientes a cada una de las seis escalas de Shatnawi del "desarrollo del pensamiento lógico-matemático" se recogen en forma sintética en el siguiente arreglo matricial

Cuadro Nº 28

Tabla de resumen del procedimiento ANOVA de un factor para cada una de las escalas de Shatnawi

		Sumas de cuadrados	gl	Medias cuadráticas	F	Sig.
Generalización* zona	Entre-grupos	,197	1	,197	,061	,805
	Intra-grupos	1112,465	345	3,225		
	Total	1112,662	346			
Inducción * zona	Entre-grupos	13,272	1	13,272	2,777	,097
	Intra-grupos	1648,865	345	4,779		
	Total	1662,137	346			
Deducción * zona	Entre-grupos	,406	1	,406	,073	,788
	Intra-grupos	1926,011	345	5,583		
	Total	1926,417	346			
Símbolos * zona	Entre-grupos	3,962	1	3,962	1,405	,237
	Intra-grupos	973,291	345	2,821		
	Total	977,254	346			
Razonamiento * zona	Entre-grupos	5,965	1	5,965	1,710	,192
	Intra-grupos	1203,238	345	3,488		
	Total	1209,203	346			
Demostración * zona	Entre-grupos	6,670	1	6,670	1,273	,260
	Intra-grupos	1808,101	345	5,241		
	Total	1814,772	346			

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

Los resultados del análisis anterior, en torno al modo en que el valor medio de los resultados obtenidos por los estudiantes en cada una de las seis escalas de Shatnawi del "desarrollo del pensamiento lógico-matemático" (DPLM) fue afectado por la clasificación de los datos en los dos subgrupos de estudiantes (procedencia rural y procedencia urbana), mostraron que en todos los seis casos los índices de significación fueron mayores que 0,05, siendo el correspondiente al componente de inducción el que más se acercó a este valor con 0,097. Para la escala de generalización el índice de significación fue de 0,805 y para la escala de inducción fue de 0,097; para deducción fue de 0,788, para uso de símbolos y lenguaje matemático fue de 0,237, para razonamiento lógico de 0,192 y para demostración matemática el valor fue de 0,260

Por lo tanto fue preciso aceptar como válida esta parte de la hipótesis nula de igualdad de medias en el sentido de que no existió diferencia significativa en el grado de desarrollo del pensamiento lógico-matemático, individualmente en cada una de las seis escalas de Shatnawi, entre los estudiantes costarricenses de undécimo año provenientes de zona rural y los provenientes de zona urbana.

En suma, al aceptar la primera hipótesis nula, se da por cierto que no existió diferencia significativa en el grado de desarrollo del pensamiento lógico-matemático –ni global ni individualmente considerado en cada una de las seis escalas de Shanawi– entre los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos provenientes de zona rural y los provenientes de zona urbana.

Se descartó, consecuentemente, la hipótesis de investigación que proponía que el grado de desarrollo del pensamiento lógico-matemático –tanto integralmente considerado como en cada una de las seis escalas de generalización, inducción, deducción, uso de símbolos y de lenguaje matemático, razonamiento lógico y demostración matemática-, difiere entre los estudiantes de undécimo año que provienen de zonas rurales y los que provienen de zonas urbanas.

Segunda hipótesis nula. No existe diferencia significativa en el desarrollo del pensamiento lógico-matemático –ni global ni individualmente considerado en cada una de las seis escalas de Shatnawi – entre los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos, sean éstos mujeres u hombres.

De ser cierta esta hipótesis, los resultados obtenidos en la prueba de DPLM por los estudiantes varones y por las estudiantes mujeres de undécimo año de colegios académicos diurnos no habrían diferido significativamente.

En forma análoga al tratamiento dado para determinar la aceptación o rechazo de la primera hipótesis nula, en este caso se hizo un estudio en el que se aplicó la técnica estadística de análisis de varianza ANOVA para determinar en qué grado la variable independiente "sexo" (hombre o mujer) explicaba la variable dependiente "desarrollo del pensamiento lógico-matemático".

Posteriormente y con el mismo fin, se aplicó también –*mutatis mutandi*– la técnica ANOVA para conocer el modo en que el valor medio de la variable de los resultados obtenidos en cada una de las seis escalas de Shatnawi, consideradas individualmente como variables dependientes, era afectado por los dos tipos diferentes de clasificación de los datos, hombre o mujer, de la variable independiente "sexo".

Siguiendo la misma estrategia empleada en la prueba de la primera hipótesis nula, en este caso la puesta a prueba de la hipótesis de igualdad de medias de los resultados de la prueba de DPLM consistió en obtener el estadístico "*F*", que reflejaba el grado de parecido existente entre las medias que se estaban comparando de los grupos de estudiantes hombres y estudiantes mujeres en el entendido de que, cuanto más diferentes fueran las medias que se estaban comparando, tanto mayor sería el valor del estadístico "*F*".

En el caso de la prueba de esta segunda hipótesis se mantuvo invariante la decisión que estableció *a priori* un valor de certeza correspondiente a ese nivel de significancia de 0,05, lo que implicó tener una seguridad del 95% para generalizar y solamente un 5% en contra. De esta forma, se mantuvo la decisión que estableció como norma de esta investigación que si el nivel crítico asociado al estadístico "*F*" (nivel de significacia o nivel alfa) "*sig*", que corresponde a la probabilidad de obtener valores como el obtenido o mayores, era menor que 0,05 se había de proceder a rechazar la hipótesis de igualdad de medias, en este caso, para los grupos de estudiantes hombres y las estudiantes mujeres.

Los resultados del análisis del grado en que la variable independiente "sexo" (hombre o mujer), explicó la variable dependiente "desarrollo del pensamiento lógico-matemático" integralmente considerado, se recoge en el siguiente arreglo matricial:

Cuadro Nº 29

Tabla de resumen del procedimiento ANOVA de un factor DPLM

		Sumas de cuadrados	Gl	Medias cuadráticas	F	Sig.
DPLM * sexo	Entre-grupos	,402	1	,402	,198	,657
	Intra-grupos	701,788	345	2,034		
	Total	702,189	346			

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

La tabla anterior recoge una cuantificación de la variación que existió entre las medias de los dos grupos de estudiantes hombres y mujeres (variación entre-grupos) y la variación que existió entre las puntuaciones dentro de cada uno de esos dos grupos (variación intra-grupos), así como una cuantificación de ambas fuentes de variación (sumas de cuadrados), los grados de libertad asociados a cada suma de cuadrados (*g*l) y el valor concreto adoptado por cada estimador de la varianza poblacional (medias cuadráticas), siendo el cociente entre ellas el que proporcionó el valor del estadístico "*F*".

Puesto que el valor del nivel crítico o nivel de significancia fue, en este caso, igual a 0,657 y, consecuentemente, mayor que 0,05, fue preciso aceptar como válida esta parte de la hipótesis nula de igualdad de medias y, consecuentemente, concluir que no existió diferencia significativa en el grado de desarrollo del pensamiento lógico-matemático, globalmente considerado, entre los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos sean éstos mujeres u hombres.

Un procedimiento análogo se siguió para conocer el modo en que el valor medio de la variable de los resultados obtenidos en cada una de las seis escalas de Shatnawi del pensamiento lógico-matemático, consideradas cada una de ellas individualmente como variables dependientes, era afectado por los dos tipos diferentes de clasificación de los datos, hombre o mujer, de la variable independiente "sexo".

En este caso, al igual que lo actuado en el caso general en el que se consideró como variable independiente el desarrollo del pensamiento lógico-matemático integralmente, también se realizó un estudio en el que se aplicó la técnica estadística de análisis de varianza ANOVA con el fin de determinar en qué grado la variable independiente "sexo", con sus dos posibilidades "hombre" o "mujer", afectaba a cada una de las seis escalas de Shatnawi del pensamiento lógico-matemático, consideradas individualmente como variables dependientes.

También en este caso, la estrategia para poner a prueba la hipótesis de igualdad de medias de los resultados de la prueba de DPLM para cada una de sus seis escalas de Shatnawi consideradas individualmente, consistió en obtener el estadístico "*F*", así como la cuantificación de la variación entre-grupos, la variación intra-grupos y la cuantificación de ambas fuentes de variación (sumas de cuadrados).

El estudio consideró los grados de libertad asociados a cada suma de cuadrados (*gl*) y el valor concreto adoptado por cada estimador de la varianza poblacional (medias cuadráticas), siendo el cociente entre ellas el que proporcionó el valor del estadístico "*F*" para cada una de las escalas de Shatnawi, consideradas individualmente con el carácter de variables dependientes

Los resultados del análisis del grado en que la variable independiente "sexo", "hombre" o "mujer", explicó con el carácter de variables dependientes cada una de las seis escalas de Shatnawi del "desarrollo del pensamiento lógico-matemático" se recogen en forma sintética en el siguiente arreglo matricial

Cuadro Nº 30

Tabla de resumen del procedimiento ANOVA de un factor para cada una de las escalas de Shatnawi

		Sumas de cuadrados	Gl	Medias cuadráticas	F	Sig.
Generalización * sexo	Entre-grupos	1,973	1	1,973	,613	,434
	Intra-grupos	1110,689	345	3,219		
	Total	1112,662	346			
Inducción * sexo	Entre-grupos	1,408	1	1,408	,292	,589
	Intra-grupos	1660,729	345	4,814		
	Total	1662,137	346			
Deducción * sexo	Entre-grupos	,124	1	,124	,022	,882
	Intra-grupos	1926,293	345	5,583		
	Total	1926,417	346			
Símbolos * sexo	Entre-grupos	1,286	1	1,286	,455	,501
	Intra-grupos	975,968	345	2,829		
	Total	977,254	346			
Razonamiento * sexo	Entre-grupos	,075	1	,075	,021	,884
	Intra-grupos	1209,129	345	3,505		
	Total	1209,203	346			
Demostración * sexo	Entre-grupos	,000	1	,000	,000	1,000
	Intra-grupos	1814,772	345	5,260		
	Total	1814,772	346			

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

Los resultados del análisis anterior, en torno al modo en que el valor medio de los resultados obtenidos por los estudiantes en cada una de las seis escalas de Shatnawi del "desarrollo del pensamiento lógico-matemático" (DPLM) era afectado por la clasificación de los datos en los dos subgrupos de estudiantes (hombres y mujeres) , mostraron que en todos los seis casos los índices de significación fueron mayores que 0,05, siendo el correspondiente al componente de generalización el que más se acercó a este valor con 0,434.

Para la escala de generalización, el índice de significación fue de 0,434; para la escala de inducción fue de 0,589; para la escala de deducción fue de 0,882; para la escala de uso de símbolos y lenguaje matemático fue de 0,501; para razonamiento lógico de 0,884 y, finalmente, para demostración matemática el valor fue de 1,000

Por lo tanto, con base en los datos anteriores, fue preciso aceptar como válida esta parte de la hipótesis nula de igualdad de medias en el sentido de que no existió diferencia significativa en el grado de desarrollo del pensamiento lógico-matemático, individualmente en cada una de las seis escalas de Shatnawi, entre los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos, fueran estos mujeres u hombres.

En suma, al aceptar la segunda hipótesis nula, se dio por cierto que no existió diferencia significativa en el grado de desarrollo del pensamiento lógico-matemático –ni global ni individualmente considerado en cada una de las seis escalas de Shanawi– entre los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos fueran estos mujeres u hombres.

Se aceptó, consecuentemente, la hipótesis de investigación que proponía que el grado de desarrollo del pensamiento lógico-matemático -tanto integralmente considerado como en cada una de las seis escalas de generalización, inducción, deducción, uso de símbolos y de lenguaje matemático, razonamiento lógico y demostración matemática- no diferían entre los estudiantes de undécimo año de colegios académicos diurnos sean éstos mujeres u hombres.

Tercera hipótesis nula. No existe diferencia significativa en el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas –ni en el área de conocimiento de Geometría ni en el área de conocimiento del Álgebra– entre los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos provenientes de zonas rurales y los provenientes de zonas urbanas.

De ser cierta esta hipótesis, los resultados obtenidos en la prueba de NLAM en las áreas de conocimiento de Álgebra y de Geometría, por los estudiantes procedentes de zonas urbanas y los estudiantes provenientes de zonas rurales no habrían diferido significativamente.

En forma análoga al tratamiento dado para determinar la aceptación o rechazo de las primera y segunda hipótesis nulas, en este caso se aplicó también

–mutatis mutandi– la técnica ANOVA para conocer el modo en que el valor medio de la variable de los resultados obtenidos en cada una de las dos áreas de conocimiento de las Matemáticas (Álgebra o Geometría), consideradas individualmente como variables dependientes, era afectado por los dos tipos diferentes de clasificación de los datos, rural o urbano, de la variable independiente "zona de procedencia".

Siguiendo la misma estrategia empleada en la prueba de las hipótesis nulas primera y segunda, en este caso la puesta a prueba de la hipótesis de igualdad de medias de los resultados de la prueba de NLAM en el área de conocimiento de Geometría consistió en obtener el estadístico "*F*", que reflejaba el grado de parecido existente entre las medias que se estaban comparando de los grupos de estudiantes procedentes de zonas urbanas y los estudiantes provenientes de zonas rurales. Lo anterior en el entendido de que, cuanto más diferentes fueran las medias que se estaban comparando, tanto mayor sería el valor del estadístico "*F*".

En forma análoga se procedió en la puesta a prueba de la hipótesis de igualdad de medias de los resultados de la prueba de NLAM en el área de conocimiento del Álgebra

Igual que en los casos anteriores, en estos casos de prueba de la hipótesis se mantuvo invariante la decisión que estableció "*a priori*" un valor de certeza correspondiente a ese nivel de significancia de 0,05, lo que implica tener una seguridad del 95% para generalizar y solamente un 5% en contra.

De esta forma, se mantuvo la decisión que estableció como norma de esta investigación que si el nivel crítico asociado al estadístico "*F*" (nivel de significacia o nivel alfa) "*sig*", que correspondía a la probabilidad de obtener valores como el obtenido o mayores, era menor que 0,05, se habría de proceder a rechazar la hipótesis de igualdad de medias, en este caso, para los grupos de estudiantes procedentes de zonas rurales y los estudiantes procedentes de zonas urbanas.

Los resultados del análisis del grado en que la variable independiente "zona de procedencia", explicó la variable dependiente "nivel de logro en el aprendizaje de Matemáticas en Geometría" se recogen en el siguiente arreglo:

Cuadro Nº 31

Tabla de resumen del procedimiento ANOVA de un factor DPLM

		Sumas de cuadrados	Gl	Medias cuadráticas	F	Sig.
NLAM * zona	Entre-grupos	,254	1	,254	,072	,789
	Intra-grupos	1220,912	345	3,530		
	Total	1221,167	346			
Geometría * zona	Entre-grupos	1,104	1	1,104	,197	,657
	Intra-grupos	1932,543	345	5,602		
	Total	1933,646	346			

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009.

De igual forma, los resultados del análisis del grado en que la variable independiente "zona de procedencia" (rural o urbana), explicó la variable dependiente "nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en el área de conocimiento de Álgebra" se recogen en el siguiente arreglo matricial

Cuadro Nº 32

Tabla de resumen del procedimiento ANOVA de un factor DPLM

		Sumas de cuadrados	Gl	Medias cuadráticas	F	Sig.
Álgebra * zona	Entre-grupos	4,240	1	4,240	1,094	,296
	Intra-grupos	1337,000	345	3,875		
	Total	1341,240	346			

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

Las dos tablas anteriores recogen una cuantificación de la variación qu existió entre las medias de los dos grupos de estudiantes de procedencia rural y de estudiantes de procedencia urbana (variación entre-grupos) y la variación que exisitió entre las puntuaciones dentro de cada uno de esos dos grupos (variación intra-grupos), así como una cuantificación de ambas fuentes de variación (sumas de cuadrados), los grados de libertad asociados a cada suma de cuadrados (*gl*) y el valor concreto adoptado por cada estimador de la varianza poblacional (medias cuadráticas), siendo el cociente entre ellas el que nos proporcionó el valor del estadístico "*F*",

Para el primer caso, correspondiente al análisis del grado en que la variable independiente "zona de procedencia" explicó la variable dependiente "nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en el área de conocimiento de Geometría", se obtuvo que el valor del nivel crítico o nivel de significancia es igual a 0,657, consecuentemente mayor que 0,05, por lo que fue preciso aceptar como válida esta parte de la hipótesis nula de igualdad de medias, en el sentido de que no existió diferencia significativa en el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en el área de conocimiento de Geometría, entre los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos provenientes de zonas rurales y los provenientes de zonas urbanas.

En forma semejante, considerando que el análisis del grado en que la variable independiente "zona de procedencia" (rural o urbana) explicó la variable dependiente "nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en el área de conocimiento de Álgebra", se obtuvo que el valor del nivel crítico o nivel de significancia fue igual a 0,296 y, consecuentemente mayor que 0,05; entonces fue preciso aceptar como válida esta parte de la hipótesis nula de igualdad de medias en el sentido de que no existió diferencia significativa en el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en el área de conocimiento del Álgebra entre los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos provenientes de zonas rurales y los provenientes de zonas urbanas.

Es interesante constatar, en los resultados del análisis anterior, que para el caso especial, no incluido en las hipótesis de esta investigación, en el que se consideró el nivel de logro en el aprendizaje en Matemáticas de las áreas integradas de Álgebra y Geometría, se encontró que el nivel crítico o nivel de significancia resultó igual a 0,789 por lo que, al igual que para los casos de Álgebra y Geometría individualmente consideradas se pudo concluir que la zona de procedencia de los estudiantes no tenía efecto en el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en las áreas integradas de Geometría y Álgebra.

En síntesis, al aceptar la tercera hipótesis nula, se dio por cierto que no existió diferencia significativa en el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas –ni en el área de conocimiento de Geometría ni en el área de conocimiento del Álgebra– entre los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos grado provenientes de zonas rurales y los provenientes de zonas urbanas

Se descartó, consecuentemente, la hipótesis de investigación que proponía que el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en las áreas de conocimientos de Álgebra y Geometría difería entre los estudiantes de undécimo año de colegios académicos diurnos que provenían de zonas rurales y los que provenían de zonas urbanas.

Cuarta hipótesis nula. No existe diferencia significativa en el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas –ni en el área de conocimiento de Geometría ni en el área de conocimiento del Álgebra– entre los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos sean éstos mujeres u hombres.

De ser cierta esta hipótesis, los resultados obtenidos en la prueba de NLAM en las áreas de conocimiento de Álgebra y de Geometría, por los estudiantes hombres y las estudiantes mujeres no habrían diferido significativamente.

En forma análoga al tratamiento dado para determinar la aceptación o rechazo de las primera, segunda y tercera hipótesis nulas, en este caso se aplicó también –*mutatis mutandi*– la técnica ANOVA para conocer el modo en que el valor medio de la variable de los resultados obtenidos en cada una de las dos áreas de conocimiento de las Matemáticas (Álgebra o Geometría), consideradas individualmente como variables dependientes, fue afectado por los dos tipos diferentes de clasificación de los datos, hombre o mujer, de la variable independiente "sexo".

Siguiendo la misma estrategia empleada en la prueba de las hipótesis nulas primera, segunda y tercera, en este caso la puesta a prueba de la hipótesis de igualdad de medias de los resultados de la prueba de NLAM en el área de conocimiento de Geometría consistió en obtener el estadístico "*F*", que refleja el grado de parecido que existía entre las medias que se estaban comparando de los grupos de estudiantes hombres y mujeres. Esto en el entendido de que, cuanto más diferentes fueran las medias que se estaban comparando, tanto mayor sería el valor del estadístico "*F*".

En forma análoga se procedió en la puesta a prueba de la hipótesis de igualdad de medias de los resultados de la prueba de NLAM en el área de conocimiento del Álgebra

Igual que en los casos anteriores, en estos casos de prueba de la hipótesis se mantuvo invariante la decisión que estableció *a priori* un valor de certeza correspondiente a ese nivel de significancia de 0,05 lo que implica tener una seguridad del 95% para generalizar y solamente un 5% en contra.

De esta forma, se mantuvo la decisión que estableció como norma de esta investigación que si el nivel crítico asociado al estadístico "*F*" (nivel de significancia o nivel alfa) "*sig*", que corresponde a la probabilidad de obtener valores como el obtenido o mayores, fue menor que 0,05, se había de proceder a rechazar la hipótesis de igualdad de medias, en este caso, para los grupos de estudiantes hombres y estudiantes mujeres.

Los resultados del análisis del grado en que la variable independiente "sexo", explicó la variable dependiente "nivel de logro en el aprendizaje de Matemáticas en Geometría" se recogen en el siguiente arreglo:

Cuadro Nº 33

Tabla de resumen del procedimiento ANOVA de un factor DPLM Geometría

		Sumas de cuadrados	Gl	Medias cuadráticas	F	Sig.
nlam * sexo	Entre-grupos	3,271	1	3,271	,927	,336
	Intra-grupos	1217,895	345	3,530		
	Total	1221,167	346			
Geometría * sexo	Entre-grupos	7,848	1	7,848	1,406	,237
	Intra-grupos	1925,798	345	5,582		
	Total	1933,646	346			

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

De igual forma, los resultados del análisis del grado en que la variable independiente "sexo" (hombre o mujer) explicó la variable dependiente "nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en el área de conocimiento de Álgebra" se recogen en el siguiente arreglo matricial:

Cuadro Nº 34

Tabla de resumen del procedimiento ANOVA de un factor DPLM Álgebra

		Sumas de cuadrados	Gl	Medias cuadráticas	F	Sig.
Álgebra * sexo	Entre-grupos	,666	1	,666	,171	,679
	Intra-grupos	1340,574	345	3,886		
	Total	1341,240	346			

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

Las dos tablas anteriores recogen una cuantificación de la variación existente entre las medias de los dos grupos de estudiantes hombres y mujeres (variación entre-grupos) y la variación que exisitió entre las puntuaciones dentro de cada uno de esos dos grupos (variación intra-grupos), así como una cuantificación de ambas fuentes de variación (sumas de cuadrados), los grados de libertad asociados a cada suma de cuadrados (*gl*) y el valor concreto adoptado por cada estimador de la varianza poblacional (medias cuadráticas), siendo el cociente entre ellas el que nos proporcionó el valor del estadístico "*F*".

Para el primer caso, correspondiente al análisis del grado en el que la variable independiente "sexo" (hombre o mujer) explicó la variable dependiente "nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en el área de conocimiento de Geometría", se obtuvo que el valor del nivel crítico o nivel de significancia fue igual a 0,237, consecuentemente mayor que 0,05 por lo que fue preciso aceptar como válida esta parte de la hipótesis nula de igualdad de medias, en el sentido de que no existió diferencia significativa en el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en el área de conocimiento de Geometría entre los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos, fueran estos mujeres u hombres.

En forma semejante, considerando que en el análisis del grado en el que la variable independiente "sexo" (hombre o mujer), explicó la variable dependiente "nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en el área de conocimiento de Álgebra", se obtuvo que el valor del nivel crítico o nivel de significancia es igual a 0,679 y, consecuentemente mayor que 0,05 por lo que fue preciso aceptar como válida esta parte de la hipótesis nula de igualdad de medias, en el sentido de que no existió diferencia significativa en el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en el área de conocimiento del Álgebra entre los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos, fueran estos mujeres u hombres.

Es interesante constatar en los resultados del análisis anterior que para el caso especial –no contemplado en las hipótesis de esta investigación– en el que se consideró el nivel de logro en el aprendizaje en Matemáticas de las áreas integradas de Álgebra y Geometría, se encontró que el nivel crítico o nivel de significancia resultó igual a 0,336 por lo que, al igual que para los casos de Álgebra y Geometría individualmente consideradas, se pudo concluir que el sexo de los estudiantes no tenía efecto en el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en las áreas integradas de Geometría y Álgebra.

En síntesis, al aceptar la cuarta hipótesis nula, se dio por cierto que no existió diferencia significativa en el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas –ni en el área de conocimiento de Geometría ni en el área de conocimiento del Álgebra– entre los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos, fueran estos mujeres u hombres.

Se tiene por cierta, consecuentemente, la hipótesis de investigación que proponía que el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en las áreas de conocimientos de Álgebra y Geometría no difiere entre los estudiantes de undécimo año de colegios académicos diurnos, sean estos mujeres u hombres.

Quinta hipótesis nula. No existe una relación significativa entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático de los estudiantes de undécimo año de los colegios costarricenses académicos diurnos –tanto globalmente considerado como para cada una de las escalas de Shatnawi del pensamiento lógico matemático– con su nivel de logro en el aprendizaje de Matemáticas en el área de conocimiento de Geometría.

Con el fin someter a prueba esta hipótesis se realizó un análisis destinado a determinar la existencia de una asociación significativa entre las variables consideradas y a procurar describir esa relación mediante algunos índices estadísticos que permitiesen cuantificar su grado o fuerza, siendo que el concepto de correlación se refiere al grado de variación conjunta existente entre dos o más variables.

El estudio se inició mediante la construcción de un diagrama de dispersión, por ser esta la forma más directa e intuitiva de tener una primera impresión sobre el tipo de relación existente entre las variables. La construcción de la gráfica mediante la ubicación de la variable DPLM en el eje de las abscisas y a la otra variable en el eje de las ordenadas, dio como resultado la figura siguiente en la que los pares ordenados (x, y) aparecen como “una nube de puntos”:

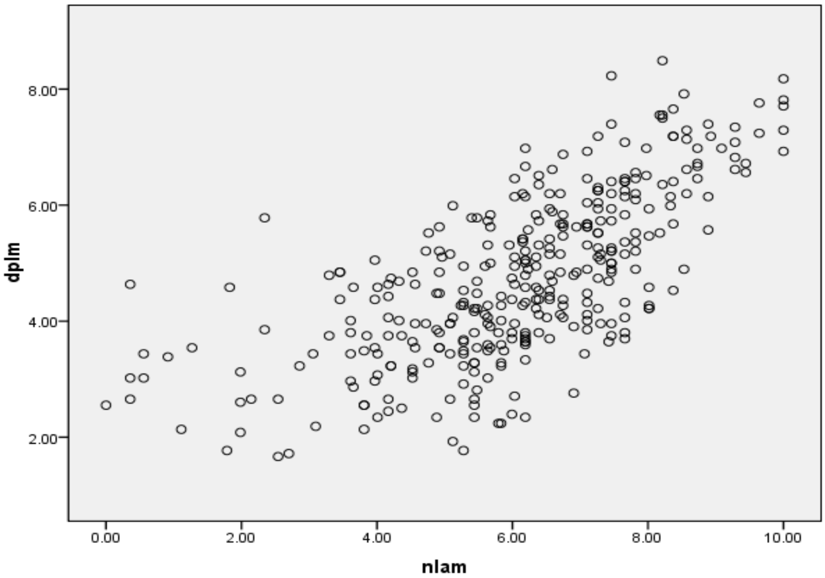


Figura Nº 19
Diagrama de dispersión

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

La forma de "nube", que muestra la gráfica anterior, brindó información muy importante sobre el tipo de relación que existía entre las variables pues, como puede observarse, el diagrama de dispersión evidenció, de manera general, la existencia de un patrón que permitió intuir una recta de mayor ajuste de carácter ascendente, que sugirió una relación lineal positiva entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático de los estudiantes, y su nivel de logro en el aprendizaje de Matemáticas, y que bien pudo representar, en forma bastante aproximada, al conjunto de todos los puntos del diagrama por lo que mostró entre estos una relación lineal y positiva.

Como es claro, el análisis de este diagrama de dispersión también evidenció la existencia de algunos "*puntos distantes*" que se ubicaban en la gráfica lejos de los demás.

Ahora bien, a pesar de que el diagrama de dispersión ofreció una importante información en torno a las relaciones entre las variables, en una investigación de esta naturaleza fue necesario obtener cuantificaciones del grado de ajuste, más precisas que las que ofreció la visión intuitiva del diagrama. Por tanto, fue indispensable determinar, mediante índices numéricos, el grado de variación conjunta de las variables.

Con ese fin se empleó la técnica de cálculo del "Coeficiente de correlación de Pearson", para poder analizar de manera más precisa las diversas relaciones entre los resultados obtenidos por los estudiantes en las seis escalas de Shatnawi del pensamiento lógico-matemático; entre estos y el desarrollo del pensamiento lógico-matemático considerado integralmente; entre los resultados obtenidos para cada una de las escalas del pensamiento lógico-matemático y los resultados correspondientes al área de Geometría, incluidas en el test de rendimiento matemático; entre los resultados obtenidos para cada una de las escalas del pensamiento lógico-matemático y los resultados correspondientes al área de Álgebra (que estudia el análisis de la siguiente hipótesis nula), y entre aquellos y la calificación total de ambos aspectos del test de logro matemático.

La determinación de estos coeficientes de correlación permitió cuantificar, en cada caso, el grado de ajuste de la relación y sirvió, tanto para cuantificar ese grado de relación lineal entre las variables cuantitativas, como para realizar una valoración del grado de ajuste de la nube de puntos a una línea recta de mejor ajuste. Este índice numérico ofreció, además, una medición de la fuerza de la relación lineal entre los valores cuantitativos apareados.

Una síntesis de los resultados obtenidos en el cálculo del "Coeficiente de correlación de Pearson" se muestra en el siguiente cuadro de los resultados obtenidos para cada una de las escalas de Shatnawi del pensamiento lógico-matemático y los resultados obtenidos por los estudiantes en el área de conocimiento de Geometría:

Cuadro Nº 35

Variación conjunta de las variables: Coeficiente de correlación de Pearson

	DPLM	G	I	D	S	R	P	NLAM	GEO
DPLM	1	0,793	0,812	0,886	0,749	0,850	0,843	0,814	0,761
G	0,793	1	0,572	0,511	0,538	0,475	0,420	0,558	0,418
I	0,812	0,572	1	0,521	0,469	0,480	0,431	0,573	0,563
D	0,886	0,511	0,520	1	0,461	0,603	0,617	0,578	0,574
S	0,749	0,538	0,469	0,461	1	0,479	0,430	0,569	0,440
R	0,850	0,475	0,480	0,603	0,479	1	0,647	0,719	0,732
P	0,843	0,420	0,431	0,617	0,430	0,647	1	0,651	0,661
NLAM	0,814	0,558	0,573	0,578	0,659	0,719	0,651	1	0,981
GEO	0,761	0,418	0,563	0,574	0,440	0,732	0,661	0,981	1

DPLM: Desarrollo del pensamiento lógico-matemático
G: Generalización
I: Inducción
D: Deducción
S: Uso de símbolos
R: Razonamiento lógico
P: Demostración matemática
NLAM: Nivel de logro de aprendizaje Matemáticas
GEO: Nivel de logro de aprendizaje Geometría

Como puede observarse, los resultados del estudio reflejaron un alto nivel de correlación entre los resultados de las seis escalas del pensamiento lógico-matemático y este, globalmente considerado, circunstancia esta que era de esperar por cuanto los valores de cada una de ellas se encuentran incluidos en el valor global.

Es particularmente importante destacar el hecho de que las correlaciones entre los seis componentes del desarrollo del pensamiento lógico-matemático y el nivel de de logro de aprendizaje en Matemáticas fueron muy semejantes, sobre todo si consideramos que las correspondientes mediciones fueron hechas de manera completamente independiente y con instrumentos de medición distintos, separados y aplicados en momentos diferentes aunque cercanos en el tiempo.

Por otra parte, como puede observarse en la síntesis de información recogida en el cuadro anterior, la correlación entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, integralmente considerado, y el logro en el aprendizaje global de las Matemáticas mostró ser significativa y del orden de 0,814.

Los valores de los coeficientes de correlación indicaron que, cuando cada una de las seis escalas de Shatnawi del desarrollo del pensamiento lógico-matemático se planteó individualmente, se encontró una importante relación con el nivel de logro del aprendizaje en Matemáticas globalmente considerado, con una cuantificación de esta que oscila en el intervalo cerrado [0,558 , 0,719]. La más fuerte relación la mostró la escala de "razonamiento lógico", seguida de manera muy cercana por la escala de "demostración matemática"; en tanto que fue la escala de "generalización" la que evidenció la relación más débil, cercana en esa cuantificación a la relación de "inducción".

Por su parte, el análisis específico de la relación entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático de los estudiantes –globalmente considerado– y su nivel de logro en el aprendizaje del área de conocimiento específico de Geometría mostró un valor significativo de 0,761 que correspondió a una medición que es, incluso, superior al valor que describió la relación del DPLM con el nivel de logro del aprendizaje de las Matemáticas considerado como un todo. Como corolario, se pudo concluir que la relación más fuerte del DPLM con el NLAM fue, precisamente, con el aprendizaje específico del área de conocimiento de la Geometría.

Un estudio de la cuantificación de las relaciones entre las seis escalas de Shatnawi, individualmente consideradas, y el área específica de Geometría del NLAM, mostró que la correlación más alta correspondió al binomio "*Razonamiento lógico–Geometría*", seguido por el correspondiente a "*Demostración matemática–Geometría*". La correlación más débil se encontró con respecto a la escala de "generalización" del desarrollo del pensamiento lógico-matemático.

En síntesis, el análisis de las cuantificaciones de las diversas correlaciones mostró que existió una relación significativa entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático de los estudiantes –tanto globalmente considerado como para cada una de las escalas de Shatnawi– y su nivel de logro en el aprendizaje de la Geometría, siendo el razonamiento lógico la escala que mostró las más alta correlación con este.

En consecuencia, se descartó la quinta hipótesis nula que señalaba que no existía tal relación significativa y, consecuentemente, se aceptó la hipótesis de investigación que señalaba que el nivel de logro en el aprendizaje de Matemáticas –en el área de conocimiento de la Geometría– alcanzado por los estudiantes costarricenses de undécimo año de los colegios académicos diurnos se encontraba relacionado con su grado de desarrollo del pensamiento lógico-matemático, tanto globalmente considerado como para cada una de las escalas: generalización, inducción, deducción, uso de símbolos y de lenguaje matemático, razonamiento lógico y demostración matemática.

Adicionalmente, como hallazgo de interés especial, se encontró que el componente de más alta correlación con el aprendizaje del Álgebra fue, a la vez, el de más baja correlación con el aprendizaje de la Geometría.

Sexta hipótesis nula. No existe una relación significativa entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático de los estudiantes de undécimo año de los colegios costarricenses académicos diurnos –tanto globalmente considerado como para cada una de las escalas de Shatnawi– y su nivel de logro en el aprendizaje de Matemáticas en el área de conocimiento del Álgebra.

La gráfica del diagrama de dispersión contemplada en la figura N° 18 en la que la "nube" sugirió una recta de mayor ajuste ascendente y, con ella, una relación lineal positiva entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático de los estudiantes y su nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas, también entrañó una relación igualmente lineal positiva de las relaciones entre el DPLM – tanto integralmente considerado como para cada una de las escalas de Shatnawi – y el logro en el aprendizaje del área de conocimiento del Álgebra.

En un procedimiento análogo al realizado para el caso específico del análisis de las relaciones entre el DPLM y el aprendizaje de la Geometría, en este caso particular correspondiente al NLAM específicamente en el área algebraica, se buscó determinar con mayor precisión el grado de ajuste de la relación entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático –integralmente considerado y para cada una de las seis escalas de Shatnawi– y NLAM específicamente en el área de conocimiento del Álgebra.

Para lograr este propósito de determinar, mediante índices numéricos, el grado de variación conjunta de estas variables se empleó en forma análoga el cálculo del "Coeficiente de correlación de Pearson".

Este análisis, para este caso, comprendió las diversas relaciones entre los resultados de los estudiantes para cada una de las seis escalas de Shatnawi y los resultados correspondientes al área de Álgebra y entre éstos y los resultados para el DPLM considerado integralmente.

Una síntesis de los resultados obtenidos se muestra en el siguiente cuadro que contiene el nivel de correlación, Coeficiente de Pearson, entre las seis escalas del pensamiento lógico-matemático –generalización, inducción, deducción, uso de símbolos y de lenguaje matemático, razonamiento lógico y demostración matemática –, el nivel de correlación entre éstas y el nivel de logro de aprendizaje de las Matemáticas, específicamente en el área de conocimiento del Álgebra y el nivel de correlación entre los resultados correspondientes al DPLM integralmente considerado y el aprendizaje específico del Álgebra:

Cuadro Nº 36

Variación conjunta de las variables: Coeficiente de correlación de Pearson

	DPLM	G	I	D	S	R	P	NLAM	ALG
DPLM	1	0,793	0,812	0,886	0,749	0,850	0,843	0,814	0,676
G	0,793	1	0,572	0,511	0,538	0,475	0,420	0,558	0,599
I	0,812	0,572	1	0,521	0,469	0,480	0,431	0,573	0,454
D	0,886	0,511	0,520	1	0,461	0,603	0,617	0,578	0,451
S	0,749	0,538	0,469	0,461	1	0,479	0,430	0,569	0,594
R	0,850	0,475	0,480	0,603	0,479	1	0,647	0,719	0,530
P	0,843	0,420	0,431	0,617	0,430	0,647	1	0,651	0,485
NLAM	0,814	0,558	0,573	0,578	0,659	0,719	0,651	1	0,938
ALG	0,676	0,599	0,454	0,451	0,594	0,530	0,485	0,938	1

DPLM: Desarrollo del pensamiento lógico-matemático
G: Generalización
I: Inducción
D: Deducción
S: Uso de símbolos
R: Razonamiento lógico
P: Demostración matemática
NLAM: Nivel de logro de aprendizaje Matemáticas
ALG: Nivel de logro de aprendizaje Álgebra

Como lo muestra el cuadro N° 36, el grado de variación conjunta del DPLM integralmente considerado y el nivel de logro en el aprendizaje del Álgebra alcanzó un valor significativo de 0,676. Considerando que el estudio previo de la correlación entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático integralmente considerado y el logro en el aprendizaje global de las Matemáticas fue del orden del 0,814, y que para el caso específico del aprendizaje de la Geometría este valor fue de 0,761 se concluyó que la correlación del DPLM con el nivel de logro en el aprendizaje específico del Álgebra de 0,676, aunque significativa, correspondió a una relación menos fuerte que la del DPLM con el aprendizaje de la Geometría y con el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas como un todo.

Un estudio de la cuantificación de las relaciones entre las seis escalas de Shatnawi, individualmente consideradas, con el área específica de Álgebra del NLAM, mostró que la correlación más alta correspondió al binomio "*Generalización–Álgebra*", seguido por el correspondiente a "*Uso de símbolos y lenguaje matemático–Álgebra*". Por su parte, la correlación más débil del nivel de logro de aprendizaje del Álgebra con el desarrollo del pensamiento lógico-matemático se encontró en el caso de la escala de "deducción". Es de destacar que la correlación entre el nivel de aprendizaje de Geometría y el nivel de aprendizaje de Álgebra alcanzó una cuantificación de de 0,624

En síntesis, el análisis de las cuantificaciones de las diversas correlaciones mostró que existió una relación significativa entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático de los estudiantes –tanto globalmente considerado como para cada una de las escalas de Shatnawi– y su nivel de logro en el aprendizaje del Álgebra, siendo la generalización la escala que mostró las más alta correlación con este.

En consecuencia, se descartó la quinta hipótesis nula que señalaba que no existía tal relación significativa y, consecuentemente, se aceptó la hipótesis de investigación que señalaba que el nivel de logro en el aprendizaje de Matemáticas –en el área de conocimiento del Álgebra–, alcanzado por los estudiantes costarricenses de undécimo año de los colegios académicos diurnos se encuentra relacionado con su grado de desarrollo del pensamiento lógico-matemático, tanto globalmente considerado como para cada una de las escalas: generalización, inducción, deducción, uso de símbolos y de lenguaje matemático, razonamiento lógico y demostración matemática.

Sétima hipótesis nula. No existe una relación significativa entre el nivel de logro en el aprendizaje de la Geometría y el conjunto de variables conformado por el sexo del estudiante, su procedencia rural o urbana y su nivel de desarrollo del pensamiento lógico-matemático globalmente considerado

Para aceptar o rechazar esta hipótesis se realizó un análisis de regresión lineal múltiple con el fin de encontrar la relación producida entre la variable "nivel de logro en el aprendizaje de Geometría", considerada como variable dependiente o variable criterio y el conjunto de las tres variables "sexo del estudiante", "procedencia rural o urbana del alumno" y su "nivel de desarrollo del pensamiento lógico-matemático globalmente considerado", aceptadas como variables predictoras o independientes.

Este análisis de regresión lineal múltiple, a diferencia del de regresión simple que se empleó en la prueba de algunas de las hipótesis nulas anteriores, permitió aproximarse más a las situaciones de análisis real, puesto que la naturaleza del aprendizaje de la Geometría es, por definición, complejo y, en consecuencia, en la medida de lo posible, debía tratar de explicarse por la serie de variables que se consideraban que directa e indirectamente participaban en su concreción. Huelga señalar, sin embargo, que la inclusión de las tres variables predictoras incluidas en esta hipótesis nula estuvo lejos de ser exhaustiva.

El propósito de esta regresión múltiple fue poder interpretar la variable independiente "nivel de logro en el aprendizaje de Geometría" como una combinación lineal del conjunto de las tres variables predictoras señaladas (cada una de ellas multiplicada por un coeficiente β_i que indica su peso relativo en la ecuación). La utilidad de esta ecuación consistió en que permitió comparar entre sí los tres coeficientes beta (β) y, de esta manera, determinar cuáles explicaban una mayor proporción de la varianza de la "variable criterio". Naturalmente, en este caso, la ecuación correspondiente ya no definió una recta, como en los casos estudiados en algunas de las hipótesis nulas anteriores, sino que correspondió a un hiperplano en un espacio tridimensional.

Como resultado de este análisis, el siguiente cuadro presenta un resumen del correspondiente modelo:

Cuadro Nº 37

Resumen del modelo para aprendizaje de Geometría como variable dependiente
Sexo, procedencia y DPLM predictores

Modelo	**R**	**R cuadrado**	**R cuadrado corregida**	**Error típico de la estimación**
1	0,644	0,415	0,413	2,055399123

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

El cuadro siguiente contiene los coeficientes de regresión parcial de las variables independientes o predictoras incluidas en el modelo de regresión; es decir, la información que fue necesaria para construir la ecuación de regresión.

Cuadro Nº 38

Coeficientes de regresión parcial para aprendizaje de Geometría como variable dependiente
Sexo, procedencia y DPLM predictores

Modelo	Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	*t*	Sig.	95% confianza intervalo para B	
	B	Error estándar	Beta			Límite inferior	Límite superior
1 (constante)	1,578	0,409		3,853	0,000	0,772	2,383
DPLM	1,047	0,078	0,589	13,465	0,000	0,894	1,200
Sexo	0,235	0,223	0,046	1,005	0,292	-0,203	0,674
Zona	-0,175	0,222	-0,035	-0,789	0,430	-0,611	0,261

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

Las primeras columnas recogen el valor de los coeficientes de regresión parcial (*B*) y su error típico. La cuarta columna contiene los coeficientes de regresión parcial estandarizada, Beta, los que proporcionaron una idea acerca de la importancia relativa de cada variable dentro de la ecuación. Las columnas quinta y sexta muestran el estadístico "***t***" y el nivel crítico "*sig*" obtenidos al contrastar las hipótesis de que los coeficientes de regresión parcial valen cero en la población. Un nivel crítico por debajo de 0,05 en el caso de la variable "desarrollo del pensamiento lógico-matemático", globalmente considerado, indicó que esta variable independiente contribuía significativamente a mejorar el modelo de regresión.

En consecuencia, la variable DPLM mostró ser significativa para explicar la variable dependiente “nivel de logro en el aprendizaje de Geometría”, en tanto que las otras dos, sexo y procedencia, no mostraron ser significativas.

Octava hipótesis nula. No existe una relación significativa entre el nivel de logro en el aprendizaje de la Geometría y el conjunto de variables conformado por sexo del estudiante, su procedencia rural o urbana y su nivel de desarrollo del pensamiento lógico-matemático considerado en cada una de las seis escalas de Shatnawi: generalización, deducción, inducción, uso de símbolos y lenguaje matemático, razonamiento lógico y demostración matemática.

En forma análoga a como se procedió en la prueba de la sétima hipótesis nula, para aceptar o rechazar esta octava hipótesis se realizó un análisis de regresión lineal múltiple, con el fin de establecer la relación que se produce entre la variable “nivel de logro en el aprendizaje de Geometría”, considerada como variable dependiente o variable criterio y el conjunto de las ocho variables predictoras o independientes: “sexo del estudiante”, “procedencia rural o urbana del alumno”, “desarrollo de la capacidad de generalización”; “desarrollo de la capacidad de inducción”; “desarrollo de la capacidad de deducción”; “desarrollo de la capacidad de uso de símbolos y lenguaje matemático”; “desarrollo de la capacidad de razonamiento lógico” y “desarrollo de la capacidad de demostración matemática”.

Con la aplicación de la técnica de regresión múltiple se tuvo como objetivo poder interpretar la variable independiente “nivel de logro en el aprendizaje de Geometría” como una combinación lineal del conjunto de las ochos variables predictoras señaladas (cada una de ellas multiplicada por un coeficiente β_i que indica su peso relativo en la ecuación). De nuevo, la determinación de esta ecuación fue de particular importancia para poder comparar los valores de cada uno de los coeficientes y señalar cuál o cuáles de ellos tenían el mayor valor predictivo, en el sentido de poder explicar una mayor proporción de la varianza de la variable dependiente, nivel de logro en el aprendizaje de la Geometría. El espacio en el que, en este caso, se estableció el hiperplano que definió la ecuación fue n-dimensional con n = 8.

Como resultado de este análisis, el siguiente cuadro presenta un resumen del correspondiente modelo:

Cuadro Nº 39

Resumen del modelo: Geometría variable independiente
Sexo, procedencia y c/u escalas de Shatnawi

Modelo	**R**	**R cuadrado**	**R cuadrado corregida**	**Error típico de la estimación**
1	0,655	0,429	0,416	1,93735240

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

El cuadro siguiente contiene los coeficientes de regresión parcial de las variables independientes o predictoras incluidas en el modelo de regresión; es decir, la información necesaria para construir la ecuación de regresión.

Cuadro Nº 40

Coeficientes de regresión parcial: Geometría variable independiente
Sexo, procedencia y c/u escalas de Shatnawi

Modelo	Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	*t*	Sig.	95% confianza intervalo para B	
	B	Error estándar	Beta			Límite inferior	Límite superior
1 (constante)	2,568	0,428		6,001	0,000	1,726	3,410
Generalización	-0,081	0,070	-0,057	-1,155	0,249	-0,219	0,057
Inducción	0,246	0,057	0,282	4,348	0,000	0,135	0,357
Deducción	0,074	0,056	0,069	1,321	0,188	-0,036	0,183
Uso símbolos	-0,012	0,072	-0,008	-0,165	0,869	-0,153	0,129
Raz. Lógico	0,498	0,071	0, 465	7,203	0,000	0,377	0,686
Dem. Matem.	0,382	0,057	0,336	4,910	0,000	0,180	0,413
Sexo	0,313	0,211	0,061	1,486	0,128	-0,101	0,727
Procedencia	-0,280	0,211	-0,055	-1,329	0,185	-0,594	0,134

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

La primera columna contiene el valor de los coeficientes de regresión parcial (*B*) de las ocho variables y muestra cómo los valores más altos correspondieron a las variables de “razonamiento lógico” y de “demostración matemática”. La segunda columna reúne los valores correspondientes a los respectivos valores de error típico. La cuarta columna contiene los coeficientes de regresión parcial estandarizada, *Beta*, que proporcionaron la información en torno a la importancia relativa de cada variable dentro de la ecuación; en ella se puede observar que los coeficientes más altos correspondieron a las variables de “razonamiento lógico”, “demostración matemática” e “inducción”. Como puede observarse, las variables “sexo” y “procedencia” mostraron coeficientes beta bajos, al igual que “generalización”, “deducción” y “uso de símbolos y lenguaje matemático”.

Las columnas quinta y sexta muestran el estadístico “***t***” y el nivel crítico “*sig*” obtenidos al contrastar las hipótesis de que los coeficientes de regresión parcial valen cero en la población. Un nivel crítico por debajo de 0,05 en el caso de las variables “inducción”; “razonamiento lógico” y “demostración matemática” señaló que estas tres variables independientes o predictoras contribuyeron significativamente a mejorar el modelo de regresión.

En consecuencia, las variables que mostraron ser significativas para explicar la variable dependiente “nivel de logro en el aprendizaje de Geometría” fueron “inducción”; “razonamiento lógico” y “demostración matemática”, en tanto que las otras cinco variables independientes, “sexo”, “procedencia”, “generalización”, “deducción” y “uso de símbolos y lenguaje matemático” no mostraron ser significativas para la explicación del nivel de logro en el aprendizaje de la Geometría.

Novena hipótesis nula. No existe una relación significativa entre el nivel de logro en el aprendizaje del Álgebra y el conjunto de variables conformado por sexo del estudiante, su procedencia rural o urbana y su nivel de desarrollo del pensamiento lógico-matemático globalmente considerado

Para aceptar o rechazar esta hipótesis se realizó un análisis de regresión lineal múltiple, con el fin de establecer la relación que se producía entre la variable “nivel de logro en el aprendizaje del Álgebra”, considerada como variable dependiente o variable criterio, y el conjunto de las tres variables “sexo del estudiante”, “procedencia rural o urbana del alumno” y su “nivel de desarrollo del pensamiento lógico-matemático globalmente considerado”, aceptadas como variables predictoras o independientes.

Este análisis de regresión lineal múltiple permitió aproximarse más a las situaciones de análisis real en consideración a la particular naturaleza del aprendizaje del Álgebra que fue, por definición, compleja. Por esta razón se procuró, en la medida de lo posible, tratar de explicar la variable dependiente por la serie de variables disponibles en la investigación, que se consideró que directa e indirectamente participaban en su concreción. Huelga señalar, sin embargo, que la inclusión de las tres variables predictoras en esta hipótesis nula estuvo lejos de ser exhaustiva.

El propósito de esta regresión múltiple fue poder interpretar la variable independiente “nivel de logro en el aprendizaje del Álgebra” como una combinación lineal del conjunto de las tres variables predictoras señaladas (cada una de ellas multiplicada por un coeficiente β_i que indica su peso relativo en la ecuación). La utilidad de esta ecuación consistió en que permitió comparar entre sí los tres coeficientes beta (β) y, de esta manera, determinar cuáles explicaban una mayor proporción de la varianza de la variable criterio. Como resultado de este análisis, el siguiente cuadro presenta un resumen del correspondiente modelo

Cuadro Nº 41

Resumen del modelo para aprendizaje Álgebra como variable dependiente
Sexo, procedencia y DPLM predictores

Modelo	**R**	**R cuadrado**	**R cuadrado corregida**	**Error típico de la estimación**
1	0,535	0,286	0,280	1,71950354

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

El cuadro siguiente contiene los coeficientes de regresión parcial de las variables independientes o predictoras incluidas en el modelo de regresión; es decir, la información necesaria para construir la ecuación de regresión.

Cuadro Nº 42

Coeficientes de regresión parcial para aprendizaje de Geometría como variable dependiente Sexo, procedencia y DPLM predictores

Modelo	Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	*t*	Sig.	95% confianza intervalo para B	
	B	Error estándar	Beta			Límite inferior	Límite superior
1 (constante)	2,587	0,343		7,552	0,000	1,913	3,261
DPLM	0,758	0,065	0,533	11,651	0,000	0,630	0,886
Sexo	0,041	0,187	0,010	0,218	0,828	-0,326	0,408
Zona	-0,390	0,186	-0,096	-2,099	0,037	-0,755	-0,025

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

Las primeras columnas recogen el valor de los coeficientes de regresión parcial (*B*) y su error típico. La cuarta columna contiene los coeficientes de regresión parcial estandarizada, Beta, los que proporcionaron una idea acerca de la importancia relativa de cada variable dentro de la ecuación. Las columnas quinta y sexta muestran el estadístico "***t***" y el nivel crítico "*sig*" obtenidos al contrastar las hipótesis de que los coeficientes de regresión parcial valen cero en la población. Un nivel crítico por debajo de 0,05 en el caso de la variable "desarrollo del pensamiento lógico-matemático", globalmente considerado, así como en el caso de la "procedencia rural o urbana del estudiante" indicó que estas dos variables independientes contribuyeron significativamente a mejorar el modelo de regresión.

En consecuencia, la variable "desarrollo del pensamiento lógico-matemático", globalmente considerado, y la variable "procedencia rural o urbana del estudiante" mostraron ser ambas significativas para explicar la variable dependiente "nivel de logro en el aprendizaje del Álgebra", en tanto que la variable "sexo" no mostró ser significativa.

<u>Décima hipótesis nula</u>. No existe una relación significativa entre el nivel de logro en el aprendizaje del Álgebra y el conjunto de variables conformado por sexo del estudiante, su procedencia rural o urbana y su nivel de desarrollo del pensamiento lógico-matemático, considerado en cada una de las seis escalas de Shatnawi: generalización, deducción, inducción, uso de símbolos y lenguaje matemático, razonamiento lógico y demostración matemática.

En forma análoga a como se procedió en la prueba de las sétima, octava y novena hipótesis nulas, para aceptar o rechazar esta décima hipótesis se realizó un análisis de regresión lineal múltiple, con el fin de establecer la relación que se producía entre la variable "nivel de logro en el aprendizaje del Álgebra", considerada como variable dependiente o variable criterio y el conjunto de las ocho variables predictoras o independientes: "sexo del estudiante", "procedencia rural o urbana del alumno", "desarrollo de la capacidad de generalización"; "desarrollo de la capacidad de inducción"; "desarrollo de la capacidad de deducción"; "desarrollo de la capacidad de uso de símbolos y lenguaje matemático"; "desarrollo de la capacidad de razonamiento lógico" y "desarrollo de la capacidad de demostración matemática".

La aplicación de la técnica de regresión múltiple, al igual que en los tres casos anteriores, tuvo como objetivo conformar un modelo matemático que permitiese estimar el efecto de las ocho variables independientes señaladas supra en el "nivel de logro en el aprendizaje del Álgebra". Análogamente, el propósito fue calcular la combinación lineal de predictores que permitiese determinar cuáles de las variables independientes poseían un mayor valor predictivo, para poder explicar más significativamente la variable dependiente "nivel de logro en el aprendizaje del Ágebra". El espacio en el que se construye el modelo en el se estableció el hiperplano que define la ecuación fue, en este caso, n-dimensional con $n = 8$.

Como resultado de este análisis, el siguiente cuadro presenta un resumen del correspondiente modelo:

Cuadro Nº 43

Resumen del modelo: Álgebra variable independiente
Sexo, procedencia y c/u escalas de Shatnawi

Modelo	**R**	**R cuadrado**	**R cuadrado corregida**	**Error típico de la estimación**
1	0,582	0,339	0,323	1,66761491

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

El cuadro siguiente contiene los coeficientes de regresión parcial de las variables independientes o predictoras incluidas en el modelo de regresión; es decir, la información necesaria para construir la ecuación de regresión.

Cuadro Nº 44

Coeficientes de regresión parcial: Geometría variable independiente
Sexo, procedencia y c/u escalas de Shatnawi

Modelo	Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	*t*	Sig.	95% confianza intervalo para B	
	B	Error estándar	Beta			Límite inferior	Límite superior
1 (constante)	1,910	0,368		5,183	0,000	1,185	2,634
Generalización	0,284	0,060	0,251	4,690	0,000	0,165	0,403
Inducción	0,022	0,049	0,024	0,454	0,650	-0,074	0,118
Deducción	-0,014	0,048	-0,016	-0,292	0,770	-0,108	0,080
Uso símbolos	0,293	0,062	0,243	4,756	0,000	0,172	0,414
Raz. Lógico	0,187	0,061	0,172	3,058	0,002	0,067	0,307
Dem. Matem.	0,105	0,049	0,119	2,151	0,032	0,009	0,201
Sexo	0,016	0,181	0,004	0,089	0,929	-0,340	0,373
Procedencia	-0,375	0,181	-0,093	-2,067	0,039	-0,731	-0,018

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

La primera columna contiene el valor de los coeficientes de regresión parcial (*B*) de las ocho variables y muestra cómo los valores más altos correspondieron a las variables de "razonamiento lógico" y de "demostración matemática". La segunda columna reúne los indicadores correspondientes a los respectivos valores de error típico. La cuarta columna contiene los coeficientes de regresión parcial estandarizada, *Beta*, que proporcionaron la información en torno a la importancia relativa de cada variable dentro de la ecuación; en ella se puede observar que los coeficientes más altos correspondieron a las variables de "generalización" y "uso de símbolos y lenguaje matemático".

Las columnas quinta y sexta muestran el estadístico "***t***" y el nivel crítico "*sig*" obtenidos al contrastar las hipótesis de que los coeficientes de regresión parcial valían cero en la población. Un nivel crítico por debajo de 0,05 en el caso de las variables "generalización"; "uso de símbolos y lenguaje matemático", "razonamiento lógico", "demostración matemática" y "procedencia rural o urbana del estudiante" indicaron que estas cinco variables independientes o predictoras contribuyeron significativamente a mejorar el modelo de regresión.

En consecuencia, esas cinco variables independientes: "generalización"; "uso de símbolos y lenguaje matemático", "razonamiento lógico", "demostración matemática" y "procedencia rural o urbana del estudiante" mostraron ser significativas para explicar la variable dependiente "nivel de logro en el aprendizaje del Álgebra", con una confianza del 95%, en tanto que sólo tres variables independientes, "sexo", "inducción" y "deducción" no mostraron ser significativas para la explicación del nivel de logro en el aprendizaje del Álgebra.

Undécima hipótesis nula. No existe una relación significativa entre el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas –comprendidas las dos áreas de conocimiento de Álgebra y Geometría– y el conjunto de variables conformado por sexo del estudiante, su procedencia rural o urbana y su nivel de desarrollo del pensamiento lógico-matemático globalmente considerado.

El estudio tendiente a aceptar o rechazar la validez de esta undécima hipótesis nula correspondió al caso más general, pues en este modelo el NLAM – considerado integralmente con las dos área de conocimiento, tanto algebraico como geométrico– constituyó la variable dependiente o criterio, mientras que fueron el desarrollo del pensamiento lógico-matemático – también globalmente considerado – la zona de procedencia y el sexo del estudiante las que conformaron las variables independientes o predictoras, por lo que puede con certeza decirse que este fue el modelo más general.

Al igual que en los casos de las cuatro últimas hipótesis nulas se aplicó, *mutatis mutandi*, la técnica de regresión múltiple, con el fin de lograr una interpretación de la variable independiente “nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas”, considerada en este caso de una manera global que incluía el Álgebra y la Geometría, como una combinación lineal de tres variables también expresadas en su forma más general, a saber, procedencia del estudiante, sexo y nivel globlal del desarrollo de su pensamiento lógico-matemático.

Como resultado de este análisis, el siguiente cuadro presenta un resumen del correspondiente modelo:

Cuadro Nº 45

Resumen del modelo para NLAM como variable dependiente
Sexo, procedencia y DPLM predictores

Modelo	**R**	**R cuadrado**	**R cuadrado corregida**	**Error típico de la estimación**
1	0,655	0,429	0,424	1,48960504

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

Por su parte, para este modelo –considerado como el más general- el cuadro siguiente contiene los coeficientes de regresión parcial de las variables independientes en el modelo de regresión y los valores de los estadísticos “*t*” y “*sig*”:

Cuadro Nº 46

Coeficientes de regresión parcial para NLAM como variable dependiente
Sexo, procedencia y DPLM predictores

Modelo	Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	*t*	Sig.	95% confianza intervalo para B	
	B	Error estándar	Beta			Límite inferior	Límite superior
1 (constante)	2,082	0,297		7,017	0,000	1,499	1,014
DPLM	0,903	0,056	0,655	16,015	0,000	0,792	1,014
Sexo	0,138	0,162	0,035	0,854	0,394	-0,180	0,456
Zona	-0,252	0,161	-0,072	-1,756	0,047	-0,599	0,034

Fuente: Resultado del análisis de los datos con el SPSS, 2009

En consecuencia, en este caso, fueron dos las variables independientes – "desarrollo del pensamiento lógico-matemático" y "zona de procedencia de los estudiantes"- las que mostraron un nivel crítico "*sig*" por debajo de 0,05, por lo que ambas contribuyeron significativamente a explicar la variable dependiente "nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas" (globalmente considerado).

En consecuencia, las dos variables independientes "desarrollo del pensamiento lógico-matemático", globalmente considerado, y "zona de procedencia de los estudiantes" mostraron ser significativas para explicar la variable dependiente "nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas" (globalmente considerado) con una confianza del 95%, en tanto que la variable "sexo" no mostró ser significativas para la explicación del nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas.

Este resultado en el que la "zona de procedencia rural o urbana*"* apareció con carácter significativo como predictor en la explicación de la variable dependiente "nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas" fue particularmente interesante, pues subyace en hipótesis que comprendieron un análisis correlacional univariado que resultó ser negativo.

CAPÍTULO V

DISCUSIÓN, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Este capítulo comprende una discusión en torno a los resultados obtenidos por los estudiantes costarricenses de undécimo año de los colegios académicos diurnos, en las pruebas de valoración del desarrollo del pensamiento lógico-matemático –considerado integral e individualmente en cada una de sus seis escalas de Shatanawi– y la prueba de evaluación del nivel de aprendizaje de las Matemáticas, específicamente en las áreas de conocimiento de Geometría y Álgebra, tal y como fueron presentados *in extenso* en el Capítulo Cuarto. Incluye esta discusión, de manera esencial, la relación existente entre esas variables y la determinación de cómo la zona de ubicación del colegio –urbano o rural– y el sexo del estudiante moderan la relación entre el desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico-matemático y el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Como premisa inicial, corresponde reiterar que el propósito de esta investigación fue aportar evidencia empírica en torno a la relación entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático en los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos –considerado este en sus escalas fundamentales de generalización, inducción, deducción, uso de símbolos y de lenguaje matemático, razonamiento lógico y demostración matemática – y su nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas, considerado en sus áreas de conocimiento algebraica y geométrica.

Además, el estudio se propuso determinar si las diferencias entre la zona de ubicación del colegio –urbano o rural– y el sexo del estudiante moderan la relación entre el desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico-matemático y el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas.

EN TORNO AL DESARROLLO GLOBAL DEL PLM

Un primer elemento relevante derivado de los resultados obtenidos en esta investigación fue la constatación de que el desarrollo del pensamiento lógico-matemático de los estudiantes de undécimo año de colegios costarricenses académicos diurnos es sumamente bajo, ya que muestra una media aritmética que apenas alcanza un valor de 4,75 en una escala de 0 a 10, hecho este que es ratificado por un valor de la mediana de 4,63 y un valor de la moda de apenas 3,80 en la misma escala.

Ello significa, *grosso modo* que, según la información obtenida, estos estudiantes costarricenses de undécimo año no llegan siquiera al 50% del desarrollo del pensamiento lógico-matemático esperado para jóvenes de último año de la educación media académica (Bitner-Corvin, 1997), circunstancia ésta que se torna aún más reveladora al verificar que el nivel de desarrollo desciende a un 36% para la escala específica de "razonamiento lógico", en la que todos los ítems mostraron el más alto nivel de dificultad del test, y que su nivel más alto lo logran en la escala de "generalización" con un valor que apenas el 58%. Este hallazgo, que muestran las medidas de tendencia central de los resultados obtenidos por los estudiantes, se confirma con los valores resultantes para las medidas de dispersión que, tanto para el caso del pensamiento lógico integralmente considerado como para cada una de las escalas de Shatnawi muestran, en general, un agrupamiento más bien cerrado y homogéneo en torno a la media.

La situación descrita evidencia una circunstancia compleja en la formación integral de nuestros estudiantes de Educación Media prontos a egresarse pues –a un paso de enfrentar los estudios universitarios o su inserción en el mundo laboral– el estudio muestra que ellos se encuentran en una situación de precario desarrollo del pensamiento lógico lo que les priva, en gran medida, del instrumento fundamental para enfrentar exitosamente el aprendizaje de las Matemáticas Superiores, los desafíos de la emergente sociedad del conocimiento y los retos de un mundo particularmente matematizado y altamente competitivo (Dou, 1998).

Para mejor comprender la dificultad y desafío que este hallazgo entraña, baste recordar cómo estudios internacionales, Archer (2010), han concluido que "*las tareas de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, en especial en Educación Media, deben privilegiar el desarrollo de las facultades lógicas de abstracción y correcto razonar como elementos básicos para lograr una mayor, pronta, efectiva y duradera apropiación de los conocimientos matemáticos*" (p. 38) y que, como lo señalan los estudios del National Council of Teachers of Mathematics (1991), *para alcanzar un aprendizaje exitoso de las Matemáticas es preciso que los alumnos de educación media posean un desarrollo del pensamiento lógico que les faculte para formular hipótesis, plantear conjeturas, procurar generalizaciones, razonar lógica y ordenadamente y ser capaces de efectuar demostraciones matemáticas básicas"* (p. 5)

De esta forma no es aventurado colegir que, en gran medida, el grave problema de rendimiento en Matemáticas que experimentan los estudiantes costarricenses del Ciclo Diversificado y de los primeros años de universidad, encuentra una de sus causas más importantes en el bajo nivel de desarrollo del pensamiento lógico-matemático que ellos han alcanzado y que este estudio evidencia pues, como lo señalan Crawford et al. (1996), en las conclusiones de la investigación que realizaron con ámbito internacional, "*el mayor grado de predicción de rendimiento en Matemáticas para estudiantes de educación media y de educación universitaria lo ocupa el desarrollo del pensamiento lógico-matemático*" (p. 11)

Por otra parte, el bajo nivel de desarrollo del pensamiento lógico matemático de los estudiantes costarricenses de undécimo año, que revela esta investigación, muestra también una importante debilidad de la educación costarricense en uno de sus propósitos fundamentales: formar hombres y mujeres capacitados para insertarse exitosamente en un tiempo en el que la vertiginosa transformación tecnológica les atrapa en un mundo de hipercomunicación que les satura de las más variada y compleja información. En efecto, dada la circunstancia descrita por esta investigación, ellos habrán de enfrentar ese desafío con la desventaja de un débil desarrollo de su capacidad real de discernimiento y discriminación, con un desarrollo insuficiente para generalizar, deducir e inducir, con una enclenque capacidad para razonar lógicamente y serias limitaciones para demostrar y ordenar pues, como lo señala claramente Bermúdez de Castro (2009), "*Las Matemáticas y con ellas el pensamiento lógico no sólo están detrás* *de muchas cosas, sino que vivimos un mundo hipermatematizado que, en consecuencia, exige que la ciudadanía necesite más de ellas para ser más libre, es decir para entender mejor y apropiarse de la compleja sociedad en la que vive*" (p.12).

EN TORNO A LA ZONA DE PROCEDENCIA Y EL DPLM

Destaca en este estudio el hallazgo de un resultado no esperado en relación con el desarrollo del pensamiento lógico-matemático en estudiantes provenientes de zona rural y en estudiantes provenientes de de zona urbana, esto por cuanto ha sido usual suponer que los primeros suelen vivir en un ambiente con menos desafíos en este ámbito y que, en consecuencia, en términos generales, su DPLM habría de mostrar algún rezago en comparación con el de los estudiantes de zonas urbanas.

Este planteamiento –que en esta investigación fue acogido como hipótesis de estudio– encuentra además sustento en los resultados de estudios internacionales de naturaleza semejante, como los realizados por Mella y Ortiz (1999) o por Reimers (2003), que indican cómo el tipo de actividades dominantes en la comunidad, las condiciones generales de vida en la zona y las características de las instituciones educativas y de sus docentes tienen un significativo impacto en el desarrollo de sus capacidades y en el logro de los objetivos educativos de los estudiantes que suele ser restrictivo para los alumnos provenientes de zona rural.

Otros estudios que sustentaron, como hipótesis de investigación, el planteamiento de la diferencia en el desarrollo del pensamiento lógico matemático entre los estudiantes de zonas rurales y los estudiantes de zonas urbanas fueron, entre otros, el de Cervini (2002) que explica hecho, no en términos de la zona de la que proviene el estudiante *per se*, sino en razón de que las características de los alumnos, sus familias y los centros educativos son diferentes en las zonas urbana y rural. Los estudiantes de las zonas rurales suelen formar parte de familias con pocos recursos económicos, sus padres tienen bajos nivel de educación, las instituciones educativas a las que asisten suelen contar con peores dotaciones, tienen menos acceso a la tecnología y sus esquemas de vida son más predecibles, lo que conforma un ambiente que sugiere menos desafíos de pensamiento lógico-matemático para los jóvenes.

Sin embargo, contrario a las conclusiones internacionales señaladas, en el caso estudiado de Costa Rica, la diferencia en el desarrollo del PLM, considerada como variable dependiente, entre los estudiantes provenientes de zonas rurales y los estudiantes provenientes de zonas urbanas no es significativa. El análisis formal, realizado mediante la técnica estadística ANOVA, dirigido a conocer el modo en que la variable de los resultados obtenidos en las seis escalas de Shatnawi son afectados por los dos tipos diferentes de zona de procedencia de los estudiantes concluyó que el nivel de significancia es superior en todos los casos al valor de certeza de 0,05, lo que permite concluir que no existe diferencia significativa en el DPLM –ni globalmente considerado ni en cada una de sus seis escalas– entre estudiantes provenientes de zonas rurales o urbanas.

Para mayor abundamiento de información, si se observa desde una perspectiva de descripción simple, es claro que las medias aritméticas para estas poblaciones –en el caso del desarrollo del pensamiento lógico-matemático globalmente considerado– apenas guardan una diferencia de 0,18. Además, para la escala de generalización, la media aritmética de los resultados de los estudiantes de zonas rurales supera ligeramente a los estudiantes de zonas urbanas con una diferencia de 0,96 en tanto que en las restantes escalas sucede lo contrario y, particularmente en la escala de razonamiento lógico los de zona urbana superan los de zona rural levemente con una diferencia de 0,23. Por su parte, la dispersión de los datos es muy semejante para ambos grupos, que muestran un agrupamiento cerrado y homogéneo, en un vecindario de radio pequeño alrededor de la media.

Sin embargo, un elemento muy importante en el análisis de estos resultados consiste en no caer en el espejismo de una satisfacción simplista producto de verificar que no se encontró diferencia significativa en el desarrollo del pensamiento lógico-matemático entre estudiantes de zona rural y de zona urbana. Esta satisfacción sólo sería válida si los resultados de valoración del desarrollo del pensamiento lógico-matemático hubiesen sido positivos para ambos grupos, pero una media de 4,66 en la escala de 0 a 10 para los estudiantes de zona rural y una media de 4,85, en la misma escala, para estudiantes de zona urbana, dibuja una grave realidad en la que ambos grupos no difieren significativamente en la circunstancia adversa de poseer un desarrollo endeble de su pensamiento lógico.

EN TORNO AL SEXO DEL ESTUDIANTE Y EL DPLM

La literatura relativa al desarrollo del pensamiento lógico matemático en hombres y mujeres es abundante en estudios que concluyen la existencia de diferencias significativas entre los estudiantes de uno u otro sexo y que atribuyen a las estudiantes mujeres, estudiantes de educación media, un menor nivel desarrollo que el alcanzado por su compañeros varones. Maccoby (1974) concluye que los hombres aventajan a las mujeres en esas habilidades matemáticas y, al igual que él, Halpern (1996), Hyde et al. (1990), Busselmans (1997) muestran resultados de investigaciones que evidencian una significativa diferencia a favor de los varones en al menos nueve países en los que se realizaron los estudios.

Sin embargo –pese a que la experiencia de un número importante de estudios internacionales de naturaleza semejante a la de esta investigación suelen mostrar un mayor desarrollo del pensamiento lógico-matemático en los estudiantes varones de último año de educación media que el alcanzado por las estudiantes mujeres– el presente estudio confirmó como válida la hipótesis inicial planteada por el investigador, formulada como producto de décadas de ejercicio de la docencia, en el sentido de que los estudiantes costarricenses varones y las estudiantes costarricenses mujeres alcanzan un desarrollo sin diferencias significativas, de su capacidad de pensamiento lógico, tanto integralmente considerado como en cada una de las seis escalas de Shatnawi.

Para determinar la veracidad de esta hipótesis se realizó, como ya ha sido descrito, un análisis mediante la técnica de ANOVA dirigido a conocer el modo en que la variable de los resultados obtenidos para el DPLM en las seis escalas de Shatnawi son afectados por el sexo de los estudiantes. Este estudio específico concluyó que el nivel de significancia fue, en todos los casos, mayor que el valor de certeza de 0,05 por lo que se confirmó que, entre estudiantes-hombres y estudiantes-mujeres, no existe diferencia significativa en el DPLM, ni globalmente considerado ni en cada una de sus seis escalas.

La confirmación de esta hipótesis inicial tiene, sin embargo, un sabor agridulce al comprobar que, si bien las diferencias entre los resultados obtenidos por los hombres y las mujeres no es significativa, las medias aritméticas de los resultados de ambos grupos son, apenas, del orden de 4,7 en la escala de 0 a 10 lo que indica, según las respuestas al test empleado, que el desarrollo de unas y otros no llega siquiera a alcanzar el 50% esperado para estudiantes de último año de Educación Media, en tanto que la media en estudios internacionales de naturaleza semejante es del orden de 7,4 en la misma escala (Murback, 2005).

Una mirada más detallada de los resultados del primer análisis descriptivo simple de estos resultados para cada una de las escalas de Shatnawi del DPLM muestra cómo los varones superan muy ligeramente a las mujeres en las escalas de generalización, inducción, deducción y en uso de símbolos y lenguaje matemático; cómo esta diferencia disminuye para el razonamiento lógico y, curiosamente, cómo las medias aritméticas son iguales para la escala de demostración matemática. El valor más alto de desarrollo se encuentra, para los varones, en la escala de generalización con un resultado de 5,86, y el más bajo en las mujeres, en la escala de razonamiento lógico con una media de 3,61. Estos resultados, si bien no constituyen diferencias significativas entre los estudiantes varones y las estudiantes mujeres costarricenses de undécimo año, sí muestran un comportamiento que recuerda las conclusiones de estudios como el Maccoby (1974) en el que, precisamente, los resultados más bajos obtenidos por las mujeres se ubican en la escala de razonamiento lógico y éstas son superadas por los varones en el desarrollo de las escalas de inducción y de deducción.

Estos resultados, por lo demás, comprenden un elemento de particular relevancia social que habría de ser investigado en tanto que sugieren –por contraste con la literatura existente, (Schamaker y Barquissau, 2004)– que quizá el ambiente escolar costarricense, construido de sus inicios con una intención de procurar un ambiente inclusivo que privilegia la participación de las mujeres, ha logrado superar significativamente los condicionamientos sociales y los sesgos de percepción referentes a las mujeres y los procesos de desarrollo del pensamiento lógico matemático.

EN TORNO AL NIVEL DE LOGRO DEL APRENDIZAJE GLOBAL DE MATEMÁTICAS

Como ha sido descrito en capítulos anteriores, los resultados obtenidos por los estudiantes costarricenses de Educación Media en las Pruebas Nacionales de Bachillerato han mostrado que, en al menos los últimos 12 años, las Matemáticas ha sido el área evaluada en la que el nivel de logro ha sido sistemáticamente menor (Barrantes et al., 2009). Efectivamente, los estudiantes de undécimo año de la Educación Media costarricense en los últimos 12 años, han alcanzado en estas pruebas nacionales una media aritmética del orden de 6,7 y una promoción baja, aunque enmascarada por el componente de la llamada "nota de presentación" que eleva en aproximadamente un diez por ciento la calificación final asignada al estudiante.

Los resultados obtenidos en la presente investigación confirman esa situación de insuficiente nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas que ha sido anualmente reiterado en las Pruebas Nacionales de Bachillerato. En efecto, en forma semejante, y con unas características que no muestran variación significativa respecto a años anteriores, la prueba de bachillerato que evaluó el NLAM en el año 2011, mostró que la media aritmética de los resultados obtenidos en el área de conocimiento de Geometría por los estudiantes costarricenses de undécimo año de los colegios académicos diurnos fue de 6,23 en la escala de 0 a 10, en tanto que en el área de conocimiento de Álgebra la media aritmética fue menor, con un valor, en la misma escala, de 5,93. Cabe señalar que los resultados obtenidos en Geometría muestran una mayor dispersión, con una desviación estándar de 2,36 contra un valor en el área de Álgebra de 1,97 lo que implica en ésta una concentración mayor alrededor de la media aritmética.

Los resultados anteriores son congruentes con la teoría expresada por el Consejo Superior de Educación (1998) en términos del desarrollo mostrado por los estudiantes de su pensamiento lógico matemático por cuanto, como se reseñará luego, hay una significativa correlación entre ambos y, como expresa el Consejo Superior, el valor formativo del Álgebra es incuestionable en la construcción de las capacidades de abstracción, generalización y manejo de símbolos matemáticos, así como el aprendizaje cabal de la Geometría es condición fundamental para construir el desarrollo armónico y secuencial de la intuición, la experimentación, la abstracción, la formulación de hipótesis y su demostración. En consecuencia puede colegirse de los resultados de esta investigación que la situación del DPLM y el NLAM de los estudiantes de undécimo año se compara, en su interpretación negativa, al uróboros del antiguo Egipto pero que, en este caso, corresponde a una continuidad negativa a la que urge cortar de un tajo.

Un hallazgo adicional interesante consistió en que, si bien los resultados muestran una significativa insuficiencia en el NLAM tanto en Geometría como en Álgebra, es interesante destacar – por inesperada – la inversión del comportamiento histórico que solía mostrar un ligero resultado mayor de la media aritmética en Álgebra respecto a la Geometría (Barrantes et al., 2009), ya que es esta última área del conocimiento la que exige un mayor empleo del razonamiento matemático, de la deducción, la inducción, la generalización y, por supuesto, de la demostración matemática, tanto por la naturaleza propia de la Geometría como por la malhadada práctica que se ha entronizado en nuestra Educación Media en el sentido de tratar la solución de los problemas algebraicos únicamente mediante un uso mecánico e insulso de la calculadora de bolsillo.

En suma, los resultados del estudio en relación con el NLAM reiteran el hecho del insuficiente nivel de logro de los objetivos de aprendizaje en Matemáticas por los estudiantes de Educación Media costarricense sigue aún siendo una tarea pendiente.

EN TORNO A LA ZONA DE PROCEDENCIA Y EL NLAM

En la formulación de la hipótesis de investigación en relación con este tema específico, se partió de la premisa de que el rendimiento académico es un constructo complejo en el que intervienen condiciones tanto endógenas como exógenas del estudiante, entre las que se encuentran, entre otras muchas, su perfil demográfico, sus condiciones familiares y la ubicación geográfica de su domicilio y su colegio (Moreira, 2009). Por esta razón, en este caso particular, se consideró como hipótesis de estudio que la procedencia rural o urbana del estudiante –por el tipo de actividades dominantes en la comunidad y las condiciones generales de vida en la zona– habría de jugar un papel restrictivo para los estudiantes de zona rural que se reflejaría en un rezago en el NLAM respecto de los estudiantes de zona urbana.

En una interesante congruencia con los resultados obtenidos en este estudio por los estudiantes de zona urbana y los estudiantes de zona rural para el caso del DPLM, la presente investigación mostró que también en la prueba de NLAM se obtuvo un resultado no previsto inicialmente, por cuanto la presunción de que los estudiantes de zonas urbanas –en razón de que cuentan, en general, con profesores que tienen mayores niveles de formación académica, con mejores condiciones de estabilidad laboral, con mayores facilidades de acceso a bibliotecas y recursos tecnológicos de apoyo al aprendizaje, con familias de niveles académicos más altos y condiciones institucionales superiores– obtendrían en las pruebas estandarizadas de bachillerato en Matemáticas resultados superiores los de los estudiantes de zona rural (Cervini, 2002) resultó ser en esta investigación incorrecta y diferente a lo esperado.

En efecto, el estudio formal ANOVA destinado a conocer el modo en que el valor medio de los resultados obtenidos NLAM, tanto en Álgebra como en Geometría, es afectado por la procedencia del estudiante –zona rural o zona urbana- mostró un nivel de significancia que, en todos los casos, fue mayor que el valor de certeza establecido en 0,05. Por lo tanto, se concluyó que no cabe aceptar que la zona de procedencia de los estudiantes tenga efecto en el logro del aprendizaje de las Matemáticas ni el Geometría ni en Álgebra.

Una visión descriptiva de esta circunstancia la brinda el hecho de que las medias aritméticas para ambos grupos, en el área de conocimiento de Geometría, apenas difieren en 0,11 a favor de los estudiantes de zona urbana y ambos con muy semejantes concentraciones de los datos en torno a ese valor central. Análogamente, para el caso de las medias aritméticas de los resultados obtenidos en Álgebra, la diferencia es de 0,22, aunque esta vez a favor de los estudiantes de zona rural.

En suma, se colige que los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos que provienen de zonas urbanas y quienes provienen de zonas rurales alcanzan un logro sin diferencias significativas en el aprendizaje de las Matemáticas en el área de conocimiento de Álgebra y en el área de conocimiento de la

Geometría. Sin embargo, una vez más, es importante destacar que esta inexistencia de diferencias significativas en razón de la procedencia de los estudiantes debe visualizarse desde la perspectiva de un NLAM que, en efecto, no muestra diferencias importantes entre estudiantes de zonas rurales y de zonas urbanas pero que implica un importante desafío pues ubica a ambos grupos en una difícil circunstancia signada por condiciones de clara insuficiencia en el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas.

EN TORNO AL SEXO DEL ESTUDIANTE Y EL NLAM

Los estudios internacionales (Mullis et al., 2000; Busselmans et al., 1997; Friedman, 1989; Mubark, 2005) señalan cómo, en principio, no existen diferencias significativas en relación con NLAM entre los estudiantes varones y las estudiantes mujeres cuyas edades son menores a los doce años; sin embargo los mismos estudios señalan que, a partir de esa edad, los resultados varían y señalan un nivel de logro mayor de los estudiantes-hombres, especialmente en áreas como Geometría y las Mediciones. Otros estudios internacionalmente reconocidos Hanna (1986) ; Battista (1990) concluyen, con incluso mayor contundencia, la existencia de diferencias significativas con un logro mayor de los estudiantes varones en Matemáticas en general y en Geometría y Álgebra en particular.

A pesar de ello, en esta investigación –como producto de más de cuatro décadas de experiencia del investigador en la enseñanza de las Matemáticas a jóvenes costarricenses de uno y otro sexo– se planteó como hipótesis de estudio, que fue luego verificada afirmativamente por los resultados obtenidos, que los estudiantes costarricenses de undécimo año, hombres y mujeres, alcanzan un NLAM sin diferencias significativas en el aprendizaje de las Matemáticas en las áreas de conocimiento de Álgebra y de Geometría.

En efecto, el análisis realizado mediante la técnica ANOVA con el fin de conocer el modo en que la variable independiente "sexo del estudiante" explicaba la variable dependiente NLAM, tanto en el área de conocimiento de Álgebra como en el área de conocimiento de Geometría, obtuvo resultados de los valores críticos o de nivel de significancia de 0,679 para el primer caso y de 0,237 para el segundo caso, ambos superiores al valor de certeza de 0,05, por lo que se concluyó –como resultado de la investigación– que el sexo de los estudiantes no tiene efecto significativo en el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en Álgebra ni en Geometría.

Como dato interesante, que naturalmente no altera la conclusión de la inexistencia de diferencias significativas en los resultados entre los dos grupos, se encontró, como valor descriptivo, que la media aritmética de los resultados obtenidos por los estudiantes varones en la prueba de NLAM en el área de Álgebra es muy ligeramente superior a la obtenida por las estudiantes mujeres, apena un 0,08, en tanto que para el caso de Geometría, siempre un margen de poca significancia, la diferencia es de 0,3.

Si se asumen las conclusiones, señaladas en capítulos anteriores, a las que llegan importantes estudios internacionales como el de Schmaker y Barquissau (2004), en el sentido de que la diferencia a favor de los varones en el estudio y construcción del conocimiento matemático en la Educación Media responde significativamente a condicionamientos sociales y a sesgos en la percepción o prejuicios inducidos; los resultados obtenidos en esta investigación podrían sugerir la existencia en los colegios costarricenses de un ambiente más libre de esos estereotipos y discriminaciones que constituyen una variable importante (González, 2003) para explicar los niveles más bajos de participación y logro de las estudiantes mujeres. Será tarea de otros investigadores hurgar sobre la veracidad de esta posibilidad en general y, en particular, a lo que atañe a las áreas de Álgebra y Geometría.

En síntesis, de los resultados de esta investigación se colige que los estudiantes hombres y las estudiantes mujeres alcanzan un logro sin diferencias significativas en el aprendizaje de las Matemáticas en el área de conocimiento de Álgebra y en el área de conocimiento de la Geometría

EN TORNO A LA RELACIÓN ENTRE EL DPLM Y EL NLAM EN EL ÁREA DE GEOMETRÍA

Como se ha señalado ya, el Consejo Superior de Educación (1998) al igual que el National Council of Teachers of Mathematics (1991), coinciden en que para lograr un exitoso proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas es fundamental que los estudiantes tengan la capacidad de formular hipótesis, plantear conjeturas, recopilar evidencias de casos particulares y procurar su generalización, poseer un manejo cabal del correcto razonar y elaborar argumentos lógicos de demostración de sus aseveraciones.

La hipótesis implícita que tiene la afirmación anterior, con la que coinciden investigadores como Archer (2003), Cazdem (1991) o Crawford et al. (1998), para sólo citar a algunos, constituyó el problema vertebrador de la presente investigación y uno de las cauces principales por los que discurrió el estudio.

De esta forma, el análisis de los resultados de esta investigación tendiente a determinar las cuantificaciones de las diversas correlaciones entre el DPLM y el NLAM mostró que existe efectivamente una relación significativa entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático de los estudiantes costarricenses de undécimo año de los colegios académicos diurnos –tanto globalmente considerado como para cada una de las seis escalas de Shatnawi– y su nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en el área de Geometría.

En efecto, el cálculo del "Coeficiente de correlación de Pearson", empleado como técnica estadística para determinar el grado de variación conjunta entre estas variables, determinó valores significativos en todos los casos. El grado o fuerza de correlación más alto correspondió –como era de esperar en razón de las características particulares que entraña el estudio de la Geometría– al binomio "*razonamiento lógico – Geometría*" con un coeficiente de correlación de Pearson de 0,732, que muestra la fuerza de la correlación del aprendizaje de la Geometría con el desarrollo de esa capacidad tan necesaria para este y que Shatnawi (1992) conceptúa como "*la transición* *entre lo conocido y lo desconocido normada por reglas y principios que constituyen la gramática de la lógica*” (p. 8)

La relación “*Demostración Matemática-Geometría*” alcanzó el segundo coeficiente más alto con un valor de 0,661 que era un resultado esperable, en razón de que el aprendizaje de la Geometría, como otras áreas de las Matemáticas pero mucho más que ellas, exige la capacidad de usar la evidencia lógica para verificar la verdad de una proposición que se sigue de la prueba de proposiciones previas. Los coeficientes de correlación para las relaciones “*Deducción-Geometría*” e “*Inducción-Geometría*” mostraron también valores relativamente altos. Contrariamente, la relación “*Uso de símbolos–Geometría*” es la que mostró el menor valor del coeficiente de correlación con un índice de 0,44.

Un dato adicional interesante consiste en que la correlación más alta entre las seis escalas de Shatnawi corresponde precisamente a la relación “*razonamiento lógico – demostración matemática*” que son precisamente las dos escalas cuyo desarrollo muestra la más alta correlación con el nivel de logro en el aprendizaje de la Geometría, lo que sugiere la fuerza de la urdimbre de estas tres variables

De estos resultados se sigue, consecuentemente, que los resultados obtenidos en esta investigación con estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos, es claramente congruente con los señalamientos mencionados supra del Consejo Superior de Educación (1998) y del National Council of Teachers of Mathematics (1991) así como de los múltiples estudios internacionales como el de Ediger y Rao (2000), Low y Over (1993), Mubark (2005), Bittner-Corvin (1997), para sólo citar algunas cuyas conclusiones son análogas.

Todos estos estudios, señalan las fuertes relaciones de los binomios “*razonamiento lógico – Geometría*” y “d*emostración matemática-Geometría*”, pues ésta área del conocimiento matemático exige particularmente al estudiante, (Fletcher, 1974), un sólido desarrollo del razonamiento lógico que engarza con el desafío geométrico permanente de determinar la existencia de relaciones de consecuencia lógica entre las conclusiones y las premisas.

EN TORNO A LA RELACIÓN ENTRE EL DPLM Y EL NLAM EN EL ÁREA DE ÁLGEBRA

Los resultados del análisis tendiente a determinar las cuantificaciones de las diversas correlaciones entre el DPLM y el NLAM en el área del Álgebra evidenciaron la existencia de una relación significativa entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático de los estudiantes costarricenses de undécimo año de los colegios académicos diurnos –tanto globalmente considerado como para cada una de las seis escalas de Shatnawi– y su nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas en el área del Álgebra.

En efecto, la técnica estadística empleada para determinar el grado de variación conjunta entre estas variables determinó, mediante el cálculo de los correspondientes coeficientes de Pearson, valores significativos en todos los casos y, con ellos, una importante correlación o asociación estadística entre ellas.

El grado o fuerza de correlación más alto correspondió al binomio "*generalización–Álgebra*" con un coeficiente de correlación de Pearson de 0,600, siendo esta circunstancia esperable por la exigencias que plantea el estudio del Álgebra coincidentes con el elemento central de la generalización que comprende la búsqueda de modelos como componente fundamental del PLM (Mason et al., 1991). Adicionalmente, esta relación que confirman los resultados del estudio verifica de la premisa de la importancia de la generalización en la aprehensión del Álgebra pues como señala Stacey, (1986), "*el aprendizaje del Álgebra marcha de la mano con la generalización entendida como el proceso por el que se descubren reglas generales mediante la articulación de los patrones algebraicos observados*" (p, 13).

Por su parte, la relación "*uso de símbolos y lenguaje matemático–Álgebra*" alcanzó el segundo coeficiente más alto con un 0,595. Ambos resultados eran esperables en congruencia con la línea mayoritaria de las investigaciones internacionales realizadas en este campo –como lo consignan Brown, Jones y Hirst (2004) – y en razón de la naturaleza del Álgebra y de los aspectos más demandantes de pensamiento lógico-matemático que implica su aprendizaje, ya que el pensamiento algebraico es el que describe con mayor riqueza las generalizaciones, mediante su enfoque centrado en la estructura matemática de las proposiciones.

. Los coeficientes de correlación para las relaciones "*Razonamiento lógico-Álgebra*" e "*Inducción-Álgebra*" mostraron también valores relativamente altos. Contrariamente, la relación "*Deducción-Álgebra*" es la que mostró el menor valor del coeficiente de correlación.

Es importante señalar que, integralmente consideradas, las variables "*Desarrollo del pensamiento lógico-matemático"* y *"Nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas"* muestran un alto coeficiente de correlación, con un valor de 0,814 lo que mostró un claro impacto, y con ello fundamental importancia, del desarrollo global de las capacidades de pensamiento lógico-matemático en el aprendizaje exitoso de esta disciplina.

EN TORNO A LA RELACIÓN NLAM GEOMETRÍA Y ÁLGEBRA; SEXO, PROCEDENCIA Y DPLM

El aprendizaje de las Matemáticas en general y de la Geometría y el Álgebra en particular, que realizan los estudiantes de Educación Media, es un proceso complejo en cuyo éxito o fracaso convergen una gran variedad de factores. Por ello, además de indagar sobre las relaciones entre el NLAM y algunas variables individuales, como se hizo en el estudio de las pruebas de hipótesis nulas anteriores, la investigación se propuso determinar la forma en que una combinación de variables explica el nivel de logro del aprendizaje de la Geometría y del Álgebra. De esta forma y sin pretender ser exhaustivos en la inclusión de todas los posibles factores que pueden cumplir el carácter de variables predictoras, el estudio incluyó como tales al sexo del estudiante, a la zona de procedencia y al DPLM globalmente considerado.

Para el caso del aprendizaje de la Geometría, la variable "*desarrollo del pensamiento lógico-matemático"* mostró ser significativa para explicar el aprendizaje de la Geometría, en tanto que la zona de procedencia y el sexo del estudiante no evidenciaron tener esta condición. Para el caso del aprendizaje del Álgebra, de nuevo el sexo no mostró ser significativo para explicarlo; sin embargo, al igual que en el aprendizaje de la Geometría, el "*desarrollo del pensamiento lógico-matemático"* sí evidenció ser significativa para la variable "*nivel de logro en el aprendizaje del Álgebra*" que, al ser considerada globalmente implica, (Archer, 2003) tanto matematización horizontal que procura "*traducir los problemas desde el mundo real al mundo matemático*" (p. 21), como la matematización vertical cuando el estudiante que ha sido ya capaz de superar la fase del problema matematizado, "*debe aplicar algoritmos conocidos y ser capaz de utilizar los conceptos y las destrezas matemáticas aprendidas*" (p. 21)

Además, como resultado de un particular interés en esta relación multivariada, se encontró que la variable "zona de procedencia del estudiante" también mostró ser significativa en el NLAM de Álgebra, circunstancia que coincide con la conjetura que subyace en la cuarta hipótesis nula y que fuera rechazada en el estudio univariante. De esta forma, en tanto que sólo la variable DPLM mostró ser significativa para explicar el nivel de logro en la enseñanza de la Geometría, sucedió que para el caso del aprendizaje del Álgebra se encontró que tanto el DPLM como la zona de procedencia –rural o urbana– del estudiante son variables predictoras con condiciones significativas para explicar ese aprendizaje.

EN TORNO A LA RELACIÓN NLAM, GEOMETRÍA Y ALGEBRA, SEXO, PROCENCIAS Y ESCALAS DE SHATNAWI

La extensión del número de variables predictoras o independientes, producto de desagregar el desarrollo del pensamiento lógico-matemático en sus seis escalas de Shatnawi -generalización, inducción, deducción, uso de símbolos y lenguaje matemático, razonamiento lógico y demostración matemática- permitió abrir más el espectro de opciones que, unidas a sexo y zona de procedencia del estudiante, pudiesen brindar una mejor explicación de la variable dependiente NLAM para el caso particular del aprendizaje de la Geometría, por una parte, y para el caso específico del aprendizaje del Álgebra por otra.

En el resultado del estudio multivariado con ocho variables independientes destacó el hecho de que, nuevamente, las variables "*razonamiento lógico*" y "*demostración matemática*" son aquellas que contribuyen más significativamente en la explicación del aprendizaje tanto de la Geometría como del Álgebra. Por su parte, la variable "*inducción*" también mostró contribuir significativamente al aprendizaje de la Geometría pero no del Álgebra. Cabe destacar que ni el sexo y ni la procedencia rural o urbana del estudiante mostraron valores significativos en el caso del aprendizaje de la Geometría como variable dependiente.

El análisis multivariado correspondiente al aprendizaje del Álgebra como variable dependiente y a las ocho variables señaladas como predictoras, encontró que no sólo se señalan el "*razonamiento lógico*" y la "*demostración matemática*" como variables con valores significativos, sino que, además, evidenció en esta misma condición la "*generalización*", el "*uso de símbolos y lenguaje matemático*" y –particularmente digno de ser destacado– este estudio revela que la "*procedencia de zona rural o urbana del estudiante*" aparece como una variable predictora significativa en relación con el aprendizaje del Álgebra.

El hallazgo de la zona de procedencia rural o urbana como variable predictora significativa en relación con el aprendizaje del Álgebra – aunque no de la Geometría – tanto en este estudio de relaciones como en el anterior, ha de ser razón de análisis posterior más en profundidad y motivo especial para atender, como lo sugiere Mason (1980) el establecimiento de "*acciones extraordinarias que promuevan condiciones de equidad curricular entre estudiantes de colegios urbanos y de colegios rurales en torno a los estímulos que les brinda la Educación Media para el cabal desarrollo de sus capacidades de PLM y de aprendizaje significativo de las Matemáticas*" (p.6)

Es importante observar que en ambos casos, tanto en el caso en que la variable dependiente es el nivel de logro en el aprendizaje de la Geometría como cuando es el aprendizaje del Álgebra, resultó que el "*sexo del estudi*ante" no evidenció valores significativos, como tampoco lo hizo la variable "*deducción*".

EN TORNO A LA RELACIÓN NLAM, SEXO, PROCENCIA Y DPLM

La literatura internacional enfatiza hoy que la idea-fuerza es mantener en lugar preferente los contenidos intuitivos de nuestra mente en su acercamiento a los objetos matemáticos abstractos, sin abandonar la comprensión e inteligencia de lo que se hace, por ello (Socas y Camacho, 2003) la tendencia general más difundida es hincar el mayor esfuerzo en la transmisión de procesos propios de las Matemáticas, más que en la simple transmisión de contenidos. En ese orden de ideas, la presente investigación de la relación entre NLAM, sexo del estudiante, zona de procedencia y su DPLM, considerados integralmente tanto la primera como la última variable.

El estudio de análisis de regresión multivariante correspondiente a las relaciones entre NLAM -integralmente consideradas las áreas de Geometría y Álgebra– como variable dependiente y las variables "*sexo del estudiante*", "*procedencia rural o urbana del estudiante*" y DPLM (globalmente considerado) como variables independientes, comprendió el modelo más general de la investigación. Los resultados obtenidos indicaron que las variables DPLM (globalmente considerado) y "procedencia rural o urbana del estudiante" mostraron ambos que contribuyen de manera significativa a explicar lo que ocurre con la variable dependiente "*nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas*" (integradas las áreas de Geometría y Álgebra).

Es muy importante destacar el hallazgo de la variable independiente "*procedencia rural o urbana del estudiante*" en el análisis de regresión como predictor significativo del nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas lo que –si bien se presupuso como elemento subyacente en una de las hipótesis rechazadas por el análisis univariante– aparece en el estudio como un elemento novedoso que sugiere la necesidad de indagar más sobre ese resultado.

Este resultado conlleva la necesidad de un fuerte impulso para realizar una tarea posterior de "problematizar" la enseñanza y el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, (Solow, 1992), generar nuevas hipótesis en torno a su potencial formativo, profundizar en el análisis que dan lugar a la construcción lógica del edificio de conocimientos matemáticos y privilegiar "el diseño de innovadoras estrategias didácticas que procuren el potencial del pensamiento lógico y estimule, como lo señala Mubark (2005) el ejercicio sistemático del correcto razonar y amplíe la visión del estudiante "*con un perspectiva integral que los vincule en la construcción de la estructura matemática*" (p. 18)

RECOMENDACIONES

El análisis de los resultados de esta investigación muestra, entre otras conclusiones más específicas, tres hallazgos fundamentales que caracterizan globalmente el desarrollo del pensamiento lógico-matemático de los estudiantes costarricenses de undécimo año de colegios académicos diurnos y su nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas. Tales hallazgos, estrechamente vinculados por su naturaleza y por su trascendencia, pueden describirse en apretada síntesis en la forma siguiente:

- Los estudiantes costarricenses de undécimo año de los colegios académicos diurnos evidencian un pobre desarrollo de su pensamiento lógico-matemático, tanto globalmente considerado como en cada una de las escalas de generalización, inducción, deducción, uso de símbolos y lenguaje matemático, razonamiento lógico y demostración matemática.

- El desarrollo del pensamiento lógico-matemático y el nivel de logro del aprendizaje de las Matemáticas, en las áreas de Álgebra y Geometría, de los estudiantes costarricenses de undécimo año de los colegios académicos diurnos, evidencian una significativa relación lineal positiva. A mayor desarrollo del pensamiento lógico-matemático, más altos son los niveles de logro alcanzado por los estudiantes en su aprendizaje de las Matemáticas.

- La relaciones entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático –tanto globalmente considerado como en cada una de las escalas consideradas– y el nivel de logro en el aprendizaje de Matemáticas en Geometría o en Álgebra no tienen diferencias significativas entre estudiantes procedentes de zonas urbanas y estudiantes procedentes de zonas rurales, ni entre estudiantes varones y estudiantes mujeres.

Estas tres conclusiones globales, a las que se arriba como resultado del análisis de los resultados de esta investigación, constituyen el marco referencial para la elaboración de las siguientes recomendaciones derivadas del estudio.

En lugar primero y preferente, se recomienda estructurar y ejecutar una acción educativa nacional tendiente a estimular y fortalecer vigorosamente –de manera permanente, ordenada y sistemática– el desarrollo del pensamiento lógico-matemático en los estudiantes costarricenses de Educación Media en el contexto de la enseñanza de las Matemáticas.

El cumplimiento de esta recomendación, por su naturaleza, implica la participación protagónica de diversos actores a quienes se traslada: la del Consejo Superior de Educación, del Ministro de Educación, de las Instituciones de Educación Superior Universitaria formadoras de docentes de Matemáticas, de la Dirección de Desarrollo Curricular del MEP, de la Dirección de Evaluación y Gestión de la Calidad del MEP, de los Asesores nacional y regionales de Matemáticas, del Instituto de Desarrollo Profesional Docente del MEP, de los Departamentos de Matemáticas de las instituciones de educación media y, de manera fundamental, decisiva e imprescindible, de los profesores de Matemáticas de Educación Media.

La acción educativa que se recomienda debe comprender**:**

- Una modificación de la concepción y objetivos de la enseñanza de las Matemáticas vista como una construcción conjunta del conocimiento, cuyo énfasis debe hacerse en la transmisión de los procesos de pensamiento propios de las Matemáticas, más que en la mera transferencia de contenidos.

- Una mediación pedagógica que –contraria a la simple acumulación de información – haga de la enseñanza y de aprendizaje en Matemáticas un acción dirigida a potenciar en los estudiantes la capacidad de conocimiento, de razonamiento autónomo y creativo; a desarrollar o incrementar la capacidad de ordenar, de relacionar, de criticar, de discernir y, finalmente, de apropiarse de las facultades necesarias para continuar por sí mismos el aprendizaje.

- Una interiorización y apropiación, por parte de los profesores y de los estudiantes, de la visión del aprendizaje de las Matemáticas como un proceso constructivo, con abandono de la idea de que este aprendizaje se logra absorbiendo pasivamente conceptos y definiciones o, peor aún, resolviendo mecánicamente extensas listas de ejercicios con adhesión de autómata a algoritmos obtenidos mediante una mecánica inexplicada.

- Los profesores de Matemáticas deben privilegiar el desarrollo de las facultades de abstracción y del "correcto razonar" como elementos que favorecen una mayor, más pronta, efectiva y duradera adquisición y apropiación de los conocimientos matemáticos, ya que estos dotan al estudiante del andamiaje indispensable para enfrentar exitosamente el problema de relacionar un orden exterior y un orden de pensamiento interior según el proceso que la epistemología-psicología denomina "*cultivo de la capacidad racional*".

- La superación de la tendencia de los docentes de Matemáticas a tener como su objetivo prioritario que sus estudiantes "*sepan hacer*", es decir, que su propósito fundamental sea procedimental y restringido a objetivos declarativos, con lo que se estropea el potencial cognitivo del estudiante.

- Realizar posibles cambios curriculares que promuevan que los estudiantes se vayan apropiando del pensamiento lógico-matemático en forma más "natural", como resultado de un trabajo doble de comprensión matemática y de vivencia ordenada y constante de un conjunto estructurado de procesos mentales de análisis y razonamiento que, enmarcados en la lógica-matemática, constituyan el fundamento inmediato de la metodología deductiva.

La realización exitosa de esta acción educativa implica necesariamente un cambio muy importante en el aula de Matemáticas, en la singular relación de enseñanza y de aprendizaje del profesor con sus estudiantes pues, al igual que cualesquiera otras transformaciones educativas, es allí en el aula, en la acción conjunta alumnos-docente, en donde efectivamente se concreta o se malogra el cambio.

Por ello, la formación de profesores de Matemáticas con conocimiento, desarrollo y apropiación del pensamiento lógico-matemático es *conditio sine qua non* para el cumplimiento de esta recomendación, por lo que se recomienda a las instituciones de Educación Superior universitaria, en sus programas de formación de docentes de Matemáticas, y al Instituto de Desarrollo Profesional Docente del MEP en su programas de capacitación y actualización, privilegiar la construcción y el desarrollo de todas las capacidades concurrentes en el pensamiento lógico-matemático y construir en los futuros y actuales profesores de Matemáticas una actitud nueva que se esmere en aprovechar la riqueza que ofrece el estudio de esta disciplina para potenciar en los estudiantes la capacidad de razón y –superando el simple objetivo procedimental de *saber hacer* con base en una transferencia de conocimientos– y que ubique, en lugar de privilegio, el desarrollo de las capacidades analíticas, lógicas, de síntesis y criticidad cognoscitivas, de deducción de razonamiento inductivo y abstracción.

Además, en razón de la naturaleza de sus responsabilidades y facultades, se recomienda a la Dirección de Desarrollo Curricular del MEP, a la Dirección de Evaluación y Gestión de la Calidad del MEP y a los Asesores nacional y regionales de Matemáticas, promover la adopción de definiciones curriculares y de estrategias de aula conducentes a una mayor y más pronta apropiación de los elementos esenciales del pensamiento lógico-matemático, de forma tal que los estudiantes adquieran una mayor seguridad y confianza en sus estudios y, consecuentemente, vivan más prontamente una experiencia académica matemática más exitosa, de mayor satisfacción, disfrute y de estímulo a su autoestima.

En relación con el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas, las relaciones más robustas y significativas correspondieron a las escalas de "*razonamiento lógico*" y "*demostración matemática*". Por lo tanto, para enriquecer las acciones de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, se recomienda la incorporación curricular de un importante y cuidadosamente estructurado énfasis conjunto de estas dos escalas del pensamiento lógico-matemático.

Esta recomendación cobra aún mayor sentido por cuanto la escala del pensamiento lógico-matemático en la que los estudiantes mostraron mayor dificultad fue, precisamente, la de "*razonamiento lógico*". En consecuencia, se recomienda que se incorporen elementos innovadores en las estrategias de mediación pedagógica, tendientes a lograr un desarrollo superior, tanto del "*razonamiento lógico*" como de "*demostración matemática*" que fue la segunda escala del PLM en orden de dificultad.

Obviamente la anterior recomendación no obsta para que los profesores de Matemáticas de Educación Media también realicen un remozamiento de la experiencia de aula que fortalezca el desarrollo de los elementos de las otras cuatro escalas de Shatnawi del PLM y, particularmente, que estimulen a sus estudiantes a emplear la estrategia de búsqueda de patrones en sus estudios de las Matemáticas ya que ésta se encuentra íntimamente integrada al proceso de pensamiento lógico. En forma análoga, se recomienda que los profesores inviten constantemente a sus estudiantes a incorporar, como tarea indispensable, la fase de verificación de sus respuestas como parte de sus tareas de solución de problemas, en beneficio del fortalecimiento de los procesos deductivos, de razonamiento y demostración matemáticos y del fortalecimiento de su capacidad de abstracción y generalización.

En lo que respecta a aspectos de mayor detalle de las relaciones entre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático en los estudiantes y su nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas, considerando que la relación más fuerte o la más alta correlación del desarrollo del pensamiento lógico-matemático con el aprendizaje específico de la Geometría correspondió a la escala de "*razonamiento lógico*" y que, además, el resultado del nivel de logro en el aprendizaje de la Geometría mostrado por los estudiantes fue claramente insuficiente, se recomienda que el estudio de esta área del conocimiento matemático se proponga como una combinación de la intuición y razonamiento lógico, que se inicie con construcciones intuitivas para ir paulatinamente formulando deducciones lógicas, sin extremar la presentación axiomática-deductiva rigurosa, pero creciendo en rangos de generalización –que mostró ser la escala de DPLM con más alto valor general de la media, a pesar de evidenciar el grado más débil de correlación con el NLAM– y abstracción, para promover en el estudiante la elaboración de conclusiones lógicas y la prueba de ellas a partir de los datos de que dispone, después de hacer acopio de ellos, organizarlos y reelaborarlos mediante operaciones cognitivas encauzadas por el docente, ejercitando y fortaleciendo así las dos escalas del pensamiento lógico-matemático –razonamiento lógico y demostración matemática – que mostraron la más fuerte correlación con el NLAM específicamente en Geometría.

Por otra parte, se recomienda que el camino inicial del estudio de contenidos de Álgebra aproveche la riqueza de contenidos de esta para fortalecer las capacidades de abstracción, de generalización y de manejo adecuado del lenguaje simbólico de las Matemáticas, con los cuales el aprendizaje del Álgebra muestra la más alta correlación.

Más que en otras disciplinas, el éxito en el aprendizaje de las Matemáticas exige la superación de los prejuicios que frecuentemente se tejen en torno a él. Uno de esos prejuicios, que los resultados de esta investigación deslegitima, es la presunta inferioridad de las mujeres en el desarrollo del pensamiento lógico-matemático y en el aprendizaje mismo de esa disciplina. Se recomienda que se incluya, como parte de la acción de profesor de Matemáticas, la creación de un entorno educativo que beneficie la igualdad de género y erradique la creencia arraigada en muchos estudiantes –principalmente las estudiantes mujeres– de la supuesta superioridad de los hombres en el aprendizaje de esta disciplina que las hace ceder, en su perjuicio, ante estereotipos de género cuya ilegitimidad evidenció esta investigación.

Cada una de las seis escalas de Shatnawi del pensamiento lógico-matemático mostró una relación significativa con el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas y esa relación es aún mayor cuando se considera globalmente el desarrollo integral del pensamiento lógico. Sin embargo, las confiabilidades relativamente bajas de cada una de las seis escalas consideradas individualmente podría haber tenido algún efecto de disminución en la valoración de la fuerza de su relación con el nivel de logro en el aprendizaje de las Matemáticas. Por ello se recomienda a futuros investigadores de este mismo problema, afinar más las escalas de pensamiento lógico-matemático para lograr confiabilidades más altas. Este propósito podría lograrse realizando una elaboración más fina de los ítems incluidos en el test para cada escala, o bien, aumentando el número de ítems para cada una de las escalas de Shatnawi.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Archer, M. (2003). *Estudio de casos sobre el razonamiento matemático de alumnos con éxito académico en la ESO.* Tesis doctoral. Universidad de Barcelona. Barcelona.

Ávila, H. (1999). *Introducción a la metodología de la investigación.* México: Artemisa S.A.

Barrantes, F. et al. (2009). *Resultado de las pruebas nacionales de educación formal, Bachillerato 2009, Informe nacional modalidad académica diurna.*

Battista, M. (1990). Spatial visualization and gender differences in high school geometry. *Journal for research in Mathematics Education,*21(1), 47-60

Bermúdez de Castro, A. (2009) *Que las Matemáticas se hagan visibles.* Santiago de Compostela: Editorial Universitaria

Beth, E. y Piaget, J. (1980). *Epistemología Matemática y Psicología: relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real*. Barcelona: Editorial Crítica.

Bitner-Corvin, B. (1997). *A measure of logical thinking ability of 12th grade students.* The Annual Meeting of the National Association for Research in Science Teaching, Washington, DC, 1997

Bruner, J. (1960). *The process of education*. Cambridge, Mass. Harvard University Press

Camacho, L. (2003). *Lógica simbólica básica*. San José: Editorial de la Universidad de Costa Rica.

Cañadas, C. y Castro E. (2002). *La importancia del pensamiento inductivo en la formación matemática inicial de los profesores.* Obtenido el 18 de diciembre de 2009, de http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/CannadasM02-2720.PDF

Cazden, C. (1991). *El discurso en el aula: el lenguaje de la enseñanza y del aprendizaje.* Barcelona: Paidós.

Cea, M. (2001). *Metodología cuantitativa. Estrategias y técnicas de investigación social*. Madrid: SÍNTESIS, S.A.

Cervini, R. (2002). Desigualdades socioculturales en el aprendizaje de la matemática y la lengua de la educación secundaria argentina. Un modelo en tres niveles. *Revista electrónica de Investigación Educativa.* Obtenido el 23 de marzo de 2010, de http://www.uv.es/relieve/v8n2.htm.

CIMM. (2007*) La Educación Matemática en Costa Rica, ideas y recomendaciones*. Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática, 2007, Año2, N°3, pp. 189-197). Universidad de Costa Rica

Consejo Superior de Educación. (1998). *Programas de Matemáticas para la Educación Diversificada.* Ministerio de Educación Pública Costa Rica. Documento mimeografiado.

Courant, R. y Robbins, H. (1996). *What is Mathematics? An elementary approach to ideas and methods.* Oxford: Oxford University Press.

Crawford, K., Gordon, S. y Prosser, M. (1998). *Conceptions of Mathematics and how it is learned the perspectives of students entering university. Learning and Instruction*. Boston: Penguin Books.

De Guzmán, M. (1991) *Enseñanza de las Matemáticas.* Obtenido el 15 de enero de 2010, de http://oei.org.co/oeivirt/edumat.htmb

De Guzmán, M. (1993). *Valores y aspectos éticos de la actividad científica.* Obtenido el 15 de enero de 2010, de http://www.rsme.es/comis/educ/senado/m2.pdf

De Guzmán, M. (2000). *El sentido de la educación matemática y la orientación actual de nuestro sistema educativo.* Obtenido el 15 de enero de

2010, de http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/Congreso/Congreso.asp

De Guzmán, M. (2006). *Para pensar mejor: desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos.* Madrid: Editorial Pirámide

Dettmer, B. (1998) *The logical thinking process.* New York: Barnes & Noble

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos.* Barcelona: Paidós.

Dou, A. (1998). *Pensamiento científico y trascendencia.* Madrid: Editorial Universidad Pontificia Comillas.

Ediger, M. y Rao, B. (2000). *Teaching Mathematics.* Boston: Discovery Publishing House.

Ernest, P. (1992). *The nature of Mathematics: Towards a Social Constructivist Account. Science and Education.* Neatherlands: Klawer Academic Publishers.

Figueiras, L. et al. (1998). *Género y Matemáticas.* México: McGraw Hill

Fischbein, E. (1987). *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*. Buenos Aires: Eudeba.

Fletcher, T.J. (1974). *Didáctica de la matemática moderna en la enseñanza media.* Barcelona: Editorial Teide

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Reidel: Dordrecht.

García, J. (2001). *La didáctica de las Matemáticas: una visión general.* Obtenido el 9 de enero de 2010, de http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/rtee/didmat.htm

George, D. y Mallery, P. (1995). *SPSS/PC step by step: A single guide and reference*. Belmont: Wadsworth Publishing Company

González, R. (2003). *Diferencias de género en el desempeño matemático de estudiantes de secundaria.* México: Santillana

Griffiths, P. (1999). *Mathematics at the turn of the millennium.* The American Mathematical Monthly. Nº 6, 750-758

Hanna, G. (1986). Sex differences in the mathematics achievement of eighth graders in Ontario. *Journal for research in Mathematics Education,* 17 (3), 231-237

Halpern, D. (1996). *Thought and knowledge: an introduction to critical thinking.* New Jersey: L. Erlbaum Associates

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, L. (2006). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw Hill

Huntley, R. (1990). The effect of diagram formats on performance of geometry items. The annual meeting of the *National Council on measurement in Education.* Boston, abril 17-19, 1990

Hurley, P. (2008). *A concise introduction to logic*. San Diego: Thomson Learning Inc.

Jonhson-Laird, P. (1999). Deductive *reasoning.* Annual Review of Psychology, 50, 109-135

Kerlinger, F. (1998). *Investigación del Comportamiento*. México: McGraw Hill

Kline, M. (1981). *El fracaso de la matemática moderna.* Madrid: Siglo XXI de España Editores.

Krulik, S y Rudnick, K. (1980). *Problem solving in school mathematics.* National Council of Teacher of Mathematics. Year Book. Virginia: Reston

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, MA: Harvard University Press

MacDonald, T. (1986). *Thinking mathematically.* New York: Shakespeare Head Press.

Mason, J. (1980). *For the learning of Mathematics*. Londres: Addison Wesley

May, L. (1996). Searching for patterns. Boston: Alyn and Bacon

Mena, P. (2010) *Evaluación del desempeño profesional de los docentes de Matemáticas en tres colegios nocturnos.* Tesis Maestría en Evaluación Educativa. Universidad de Costa Rica. San José.

Messick, S. (1989). *Meaning and values in test validation: The science and ethics of assessment.* Educational Researcher, Vol. 18, No. 2, pp.5-11

Ministerio de Educación Pública. (2009). *Guía para los docentes.* Documento mimeografiado.

Moise, E. (2002). *Elementary Geometry from an advanced standpoint*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company

Moon, J. A. (2006). *Critical thinking: an exploration of theory and practice.* London: RoutledgeFalmer.

Moreira, T. (2009). Relación entre factores individuales e institucionales con el rendimiento en Matemática: un análisis multivariado. *Avances en Medición*, 7, 115-128

Mubark, M. (2005). *Mathematical thinking and mathematics achievement of students in scientific stream in Jordan.* United Kingdom: University of Newcastle Press

National Council of Teachers of Mathematics NCTM. (1991). *Mathematical thinking. Experiences in mathematical discovery.* Series 6. Washington: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Virginia: NCTM Press

Petocz, P. y Petocz, D. (1994). *Pattern and proof the art of mathematical thinking*. Sydney: University of Technology Press.

Piaget, J. (1970). *La epistemología genética.* Barcelona: Redondo.

Piaget, J. (1978). *Psicología del niño.* Madrid: Editorial Morata

Piaget, J. (1990). *La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo.* Madrid: Siglo XXI

Poincaré, H. (1903). *La Creación Matemática.* Conferencia pronunciada en la Sociedad Psicológica de París. Obtenido el 16 de abril de 2010, de http://www.ucm.es/info/pslogica/mente/lectura.htm

Polya, G. (1965) *Matemáticas y razonamiento plausible.* Madrid: Tecnos.

Polya, G. (1990). *How to solve it: A new aspects of mathematical method*. London: Penguin

Pujol, R. (2004). *Diferenciales entre zonas urbanas y rurales de Costa Rica.* Obtenido el 14 de mayo de 2010, de http://produs.ucr.ac.cr/Art_Censo.pdf

Rojas, R. (2005). *Guía para realizar investigaciones sociales.* México: Plaza y Valdéz.

Ruesga, P. (2002). *Educación del razonamiento matemático.* Tesis doctoral en Educación, Universidad de Barcelona

Russell, B. y North, A. (1997). *Principia Mathematica*. New York: Cambridge University Press.

Sagüillo, J. (2008). *El pensamiento lógico-matemático*. Madrid: Ediciones Akal S.A.

Savater, F. (2004). *El valor de educar.* Barcelona: Editorial Ariel.

Sawyer, W. (1995). *Prelude to Mathematics.* New York: Dover Publications Inc.

Schmader, T y Barquissau, M. (2004). *The cost of accepting gender differences: the role of the stereotype endorsement in women`s experience in the Mathematics domain.* Sex Roles: a Journal of Research, 6.

Senk, S. (1985). Geometry proof writing: A new view of sex differences in mathematics ability. *American Journal of Education,* 91 (2), 187-201

Serrano, J. (2008). *El desarrollo del pensamiento lógico-matemático*. Obtenido el 23 de octubre de 2009, de http://www.matesymas.es/jm/infantil/congresos/pensa_logico.pdf.

Shatnawi, F. (1992). *Development of mathematical thinking in secondary level students.* Jordan: Yamouk University Press.

Shelltiz,C., Jahoda, M., Dutsch, M y Cook, S. (1980). *Métodos de investigación en las relaciones sociales.* Madrid: Rialp.

Smith, L. (2002). *Reasoning by Mathematical Induction in Children's Arithmetic.* Boston, Pergamon.

Socas, M. y Camacho, M. (2003). *Conocimiento Matemático y Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria, algunas reflexiones*. Obtenido el 18 de diciembre de 2009, de http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/socas-machin.pdf

Solow, D. (1992). *Entender y hacer demostraciones en Matemáticas.* Madrid: Ediciones Ateneo.

Stacey, K. (1986). *Strategies for problem solving*. Burwood, Victoria, Victoria College Press.

TIMSS. (2004). *TIMSS 2003 Internationational Mathematics Report.* Obtenido el 24 de noviembre de 2009, de http//www.tims.org/

Víquez, J. (2001). *Efectos del proceso de adecuación curricular en el mejoramiento de la calidad de la educación primaria en Nicaragua*. Tesis doctoral en Educación. Universidad Estatal a Distancia. San José.

Vygotsky, L. (1977). *Pensamiento y lenguaje.* Buenos Aires: La Pléyade.

Vygotsky, L. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Barcelona: Ed. Crítica.

Zorn, P. (2000). *Algebra, computer algebra and mathematical thinking.* Obtenido el 18 de noviembre de 2009, de http://www.stolaf.edu/people/zorn/

ANEXOS

ANEXOS

ANEXO N° 1

PENSAMIENTO LÓGICO-MATEMÁTICO

Evaluación Undécimo Año

Estimados estudiantes:

Esta prueba ha sido diseñada para evaluar algunos aspectos del pensamiento lógico-matemático.

- Por favor lea cada pregunta cuidadosamente y respóndalas en forma objetiva.

- Las preguntas de escogencia múltiple tienen una única respuesta correcta.

- Por favor, escriba una justificación para cada una de sus respuestas. Es decir, en cada pregunta explique las razones y el procedimiento que usted siguió para dar su respuesta.

- Por favor, **no escriba nada en la hoja de preguntas**, utilice únicamente la hoja de respuestas para escribir sus contestaciones.

- Por favor, escriba su nombre, número de cédula de identidad y nombre de su colegio en la ***Hoja de Respuestas***

- Por favor, devuelva la ***Hoja de Respuestas*** y el ***Fascículo de las Preguntas*** tan pronto concluya la prueba.

MUCHAS GRACIAS

PRIMERA PARTE: GENERALIZACIÓN

1. Analice la relación entre los números de la columna de la izquierda y los números de la columna de la derecha. Con base en su análisis, complete la última proposición indicando cuál es el valor que le debe corresponder al número natural “***n***” según esa misma relación

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 1 \\ 2 & \longrightarrow & 4 \\ 3 & \longrightarrow & 9 \\ 4 & \longrightarrow & 16 \\ 5 & \longrightarrow & 25 \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \boldsymbol{n} & \longrightarrow & \underline{\qquad\qquad} \end{array}$$

2. Analice cuidadosamente las siguientes cinco igualdades, descubra la ley que se da en ellas y, con base en su análisis, llene el espacio en blanco correspondiente a la igualdad “enésima” para el valor de $(n+1)^{\mathbf{2}} - n^{\mathbf{2}}$:

$$2^2 - 1^2 = 2(1) + 1$$

$$3^2 - 2^2 = 2(2) + 1$$

$$4^2 - 3^2 = 2(3) + 1$$

$$5^2 - 4^2 = 2(4) + 1$$

$$6^2 - 5^2 = 2(5) + 1$$

.

.

.

$$(n+1)^2 - n^2 = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

3. Analice la siguiente serie que muestra los valores de: a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 Descubra la ley que los define y con base en su análisis llene el espacio en blanco indicando cuál debe ser el valor que le corresponde al término "enésimo", es decir, al valor a_n en esa serie.

a_1 = 2

a_2 = 4

a_3 = 8

a_4 = 16

a_5 = 32

.

.

.

a_n = ____

4. Analice cada uno de los siguientes pares de igualdades:

4 x 4 = 16	1 x 7 = 7
5 x 5 = 25	2 x 8 = 16
6 x 6 = 36	3 x 9 = 27
7 x 7 = 49	4 x 10 = 40
8 x 8 = 64	5 x 11 = 55

Encuentre la relación que existe entre cada igualdad de la columna izquierda y la correspondiente igualdad de la columna derecha. Con base en sus conclusiones llene el espacio en blanco y complete la siguiente proposición:

a x a = 100	(a-3) x (a+3) = ___

SEGUNDA PARTE: INDUCCIÓN

5. Si se sabe que el número de bacterias que hay en una colonia crece exponencialmente de forma tal que ayer a la 1 p.m. había **1000** bacterias, a las 2 p.m. el número de bacterias era de **2000** y a las 3 p.m. era de **4000**. ¿Cuántas bacterias había en esa colonia ayer a las 6 p.m.?

6. Analice las características de los cinco primeros términos de la siguiente serie de números mixtos:

$$3\tfrac{1}{2} \qquad 5\tfrac{1}{3} \qquad 7\tfrac{1}{4} \qquad 9\tfrac{1}{5} \qquad 11\tfrac{1}{6} \qquad \ldots$$

¿Cuál es el sétimo término de esta serie?

7. Dos amigos juegan a lanzar fichas a los cuadrados de un tablero como el que se muestra a continuación:

1º	2º	3º	4º
5º	6º	7º	8º
9º	10º	11º	12º

Si la ficha cae en el **1**^{er} cuadrado se pagan **₡3;** si cae en el **2º** cuadrado se pagan **₡6** ; si cae en el **3º** se pagan **₡12;** si cae en el **4º** se pagan **₡24** ; si cae en el **5º** se pagan **₡ 48** y así sucesivamente en ese orden. ¿Cuántos colones se pagan si la ficha cae en el **8º** cuadrado?

8. Analice las características de la siguiente serie de números:

4, 7, 10, 13, 16, 19 **. . . . . .**

Indique cuál es el <u>octavo</u> término de esta serie

TERCERA PARTE: DEDUCCIÓN

9. Si "x" y "y" son dos números reales positivos tales que **$(x \cdot y) = 1$** entonces, ¿cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

- **a.** Si "x" es mayor que 1, entonces "y" debe ser mayor que 1
- **c.** Si "x" es menor que 1, entonces "y" debe ser menor que 1
- **d.** Si "x" es mayor que 1 entonces, "y" debe ser menor que 1
- **e.** Si "x" es igual a 1 entonces, "y" debe ser igual a cero.

10. Si se sabe que el conjunto **A** está formado por todos los números enteros que son múltiplos de **5** y si se sabe además que el número **30** (que es múltiplo de cinco) pertenece a otro conjunto **B**, entonces se puede concluir que:

- **a.** El conjunto **A** y el conjunto **B** son iguales
- **b.** El conjunto **A** es un subconjunto del conjunto **B**
- **c.** El conjunto **B** es un subconjunto del conjunto **A**
- **d.** Ninguna de las afirmaciones anteriores

11. Analice las dos proposiciones siguientes:

“Todos los monos en el Parque Manuel Antonio están protegidos”

“Todos los venados en el Parque Santa Rosa están protegidos”

Con base en las dos proposiciones anteriores se puede concluir con certeza que:

a. Todos los monos en ambos parques están protegidos.

b. Todos los venados en ambos parques están protegidos

c. Todos los monos y los venados en ambos parques están protegidos.

d. No se puede concluir ninguna de las afirmaciones anteriores

12. Considere las tres proposiciones siguientes:

- *“ΔABC es un triángulo rectángulo”*
- *“Existen algunos triángulos isósceles que también son triángulos rectángulos”*
- *“En todo triángulo la suma de las medidas de los ángulos internos es igual a 180.*

Con base en las tres proposiciones anteriores se puede concluir con certeza que:

a. **Δ** ABC es un triángulo isósceles y las medidas de sus ángulos internos suman 180.

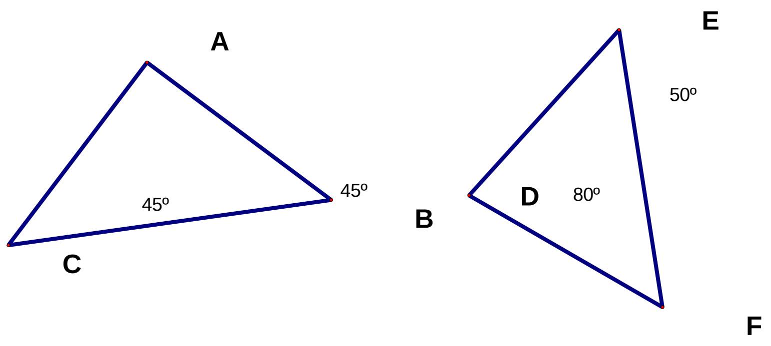
b. La suma de las medidas de los ángulos internos de **Δ**ABC es igual a 180.

c. **Δ** ABC es un triángulo que no es isósceles

d. **Δ** ABC es un triángulo isósceles y rectángulo.

CUARTA PARTE: USO DE SÍMBOLOS

13. Analice las figuras de los dos triángulos siguientes en las que muestran las medidas de dos de sus ángulos internos:



Con base en la información que ofrecen esas figuras se puede concluir que:

a. El triángulo **Δ DEF** es rectángulo

b. El triángulo **Δ ABC** no es rectángulo

c. El triángulo **Δ ABC** es isósceles y es rectángulo

d. El triángulo **Δ DEF** es rectángulo pero no es isósceles.

14. En un colegio hay dos grupos de XI año: el **11-A** y el **11-B**. El grupo **11-A** tiene diez estudiantes más que el grupo **11-B**. Si cinco estudiantes del **11-B** se trasladaran al grupo **11-A** entonces resultaría que el número de estudiantes del **11-A** sería el triple del número de estudiantes en el **11-B**. El sistema de ecuaciones que describe esas relaciones es el siguiente:

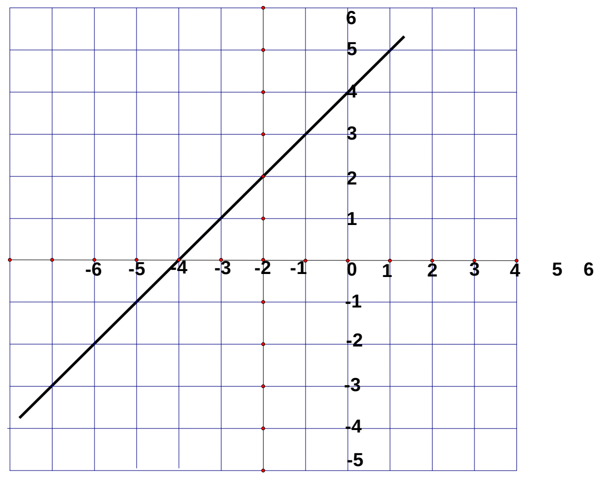
a- $x = y + 10$
$x + 5 = 3y$

b- $x - 10 = y$
$y - 5 = 3x$

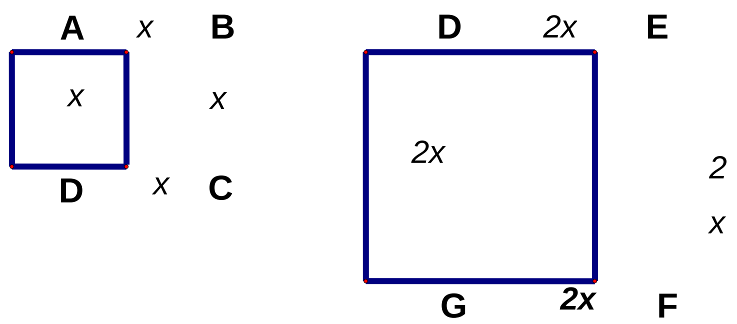
c- $x = y + 10$
$x + 5 = 3(y - 5)$

d. $x - 5 = y + 10$
$3y = x + 10$

15. Analice la siguiente gráfica correspondiente a una función lineal. Calcule e indique cuál es la ecuación de esa recta.



16. Analice las figuras de los dos cuadrados □ ABCD y □ DEFG que se muestran a continuación y que tienen la indicación de las longitudes de sus lados:



Se puede concluir que:

a. El área de □ DEFG es el doble del área de □ ABCD

b. El área de □ABCD es un tercio del área de □ DEFG

c. El área de □ DEFG es cuatro veces el área de □ ABCD

d. El área de □ ABCD es la mitad del área de □ DEFG

QUINTA PARTE: PENSAMIENTO LÓGICO

17. Manuel, Sonia, Juan y Ana tienen cada uno un caballo.

- El caballo de Manuel es más oscuro que el caballo de Sonia, pero es más rápido y más viejo que el de Juan.
- El caballo de Juan es más lento que el de Ana y el caballo de Ana es más joven que el de Manuel
- El caballo de Manuel es más viejo que el de Sonia y el caballo de Sonia es más claro que el de Ana.
- El caballo de Juan es más lento y más oscuro que el de Sonia

Determine e indique cuál es el caballo más lento, cuál es el más viejo y cuál es el más claro.

18. Lea cuidadosamente la proposición siguiente y luego escriba la negación de esa proposición pero sin utilizar la palabra "***no***":

Hay un número real cuyo cuadrado es un número negativo.

19. En una carrera participan cuatro atletas. El atleta **B** llegó de primero. El atleta **C** llegó a la meta inmediatamente detrás del atleta **B** y el atleta **D** llegó a la meta entre la llegada del atleta **A** y la llegada del atleta **C**. Indique cuál fue el orden de llegada de los cuatro atletas.

20. Analice las siguientes expresiones dichas por cuatro amigos:

Luis: "Si el lápiz está en la caja, entonces el lápiz no está en la gaveta"

Sara: "Si el lápiz no está en la caja, entonces el lápiz está en la gaveta"

Vera: "Si el lápiz está en la caja, entonces el lápiz está en la gaveta"

Carlos: "Si el lápiz no está en la caja, entonces el lápiz no está en la gaveta"

Si se sabe con toda certeza que Vera dijo la verdad, entonces **¿quién más dijo también necesariamente la verdad?**

a. Luis
b. Sara
c. Carlos
d. Ninguno de los anteriores

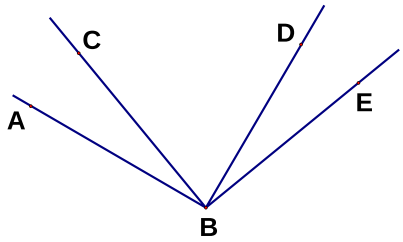
SEXTA PARTE: DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

21. Se sabe que todo número natural "**par**" es múltiplo de 2 y que, por lo tanto, es igual a un producto de la forma $2\cdot\mathbf{x}$ **,** donde x es un número natural

¿Cómo se puede probar que la suma de dos números pares también es un número par?

Es decir, si $2\cdot\mathbf{m}$ y $2\cdot\mathbf{n}$ son dos números pares ¿cómo se puede probar que $\mathbf{(2\cdot m + 2\cdot n)}$ también es par?

22. Se sabe que dos ángulos son complementarios si la suma de las medidas es igual a 90º.



Si en la figura anterior los ángulos $\angle ABC$ y $\angle CBD$ son complementarios y, además, los ángulos $\angle CBD$ y $\angle DBE$ son complementarios, entonces, ¿cómo se puede probar que los ángulos $\angle ABC$ y $\angle DBE$ tienen la misma medida? Escriba las razones por las que se puede afirmar que los ángulos $\angle ABC$ y $\angle DBE$ tienen la misma medida.

23. Analice la siguiente proposición:

"Si ***a*** *y* ***b*** *son dos números reales para los que se cumple que* $a^2 b > 0$ *, entonces "****b****" debe ser un número positivo"*

¿Cómo se puede probar que, en efecto, "***b***" es un número positivo?

Escriba las razones por las que se puede afirmar que "***b***" es positivo

24. Analice la siguiente proposición:

"*Ningún triángulo puede tener dos ángulos internos rectos*"

¿Cómo se puede probar que la proposición anterior es cierta? Escriba las razones por las que se puede afirmar con certeza que ningún triángulo puede tener dos ángulos internos rectos.

ANEXO N° 2

PENSAMIENTO LÓGICO-MATEMÁTICO

HOJA DE RESPUESTAS

Nombre del estudiante con dos apellidos:	
Nº cédula del estudiante:	
Nombre del colegio	

1. En la proposición "enésima" el valor correspondiente a n es _______

Justificación de la respuesta:

2. En la igualdad "enésima" el valor que corresponde a $(n+1)^2 - n^2$

es: _______

Justificación de la respuesta:

3. El valor correspondiente al término "enésimo" a_n es: _______

Justificación de la respuesta:

4. El resultado correspondiente a $(a-3) \times (a+3)$ es:

Justificación de la respuesta:

5. El número de bacterias en la colonia a las 6 p.m. fue ___________

Justificación de la respuesta:

6. El sétimo término de la serie corresponde a: ________

Justificación de la respuesta:

7. Si la ficha cae en el 8º cuadrado se pagan ₡ _______

Justificación de la respuesta:

8. El octavo término de la serie corresponde a: ________

Justificación de la respuesta:

9. La proposición correcta es la correspondiente a la letra : _______

Justificación de la respuesta:

10. La proposición correcta es la correspondiente a la letra: _______

Justificación de la respuesta:

11. La proposición correcta es la correspondiente a la letra: _______

Justificación de la respuesta**:**

12. La proposición correcta es la correspondiente a la letra: _______

Justificación de la respuesta:

13. La proposición correcta es la correspondiente a la letra: _______

Justificación de la respuesta**:**

14. La proposición correcta es la correspondiente a la letra: ________

Justificación de la respuesta:

15. La ecuación de la recta es:

____

Justificación de la respuesta:

16. La proposición correcta es la correspondiente a la letra: ________

Justificación de la respuesta:

17. El caballo más lento es el de __________; el caballo más viejo es el de ____________ y el caballo más claro es el de ____________

Justificación de la respuesta:

18. La negación de la proposición (sin usar la palabra "no") es:

____

Justificación de la respuesta:

19. El orden de llegada de los atletas fue el siguiente:

____

Justificación de la respuesta:

20. La proposición correcta es la correspondiente a la letra: ________

Justificación de la respuesta:

21. La forma de probar que (2m+2n) es un número par es la siguiente:

Justificación de la respuesta

22. La forma de probar que los ángulos $\angle ABC$ y $\angle DBE$ tienen la misma medida es la siguiente:

23. La forma de probar que "***b***" es un número positivo es la siguiente:

24. La forma de probar la proposición es la siguiente:

ANEXO N° 3

CRITERIOS DE VALIDACIÓN DEL CUESTIONARIO DE DPLM PARA ESTUDIANTES

Nombre del validador o validadora____

Fecha de la validación: __________________________________

		SI	NO	Observaciones
1	La introducción del instrumento, ¿le parece pertinente?			
2	¿Agregaría, eliminaría o modificaría algún elemento de la página correspondiente a la información en instrucciones que se brinda al estudiante?			
3	¿Considera usted los ítems correspondientes a generalización son congruentes con las características propias de esta escala?			
4	¿Considera que los ítems correspondientes a generalización reflejan el dominio específico del contenido que se procura medir?			
5	¿Considera usted que los ítems correspondientes a generalización responden a las características del estudiante costarricense en esta escala del DPLM? Redacción, vocabulario, forma			
6	¿Considera apropiada la estructura, relación del enunciado y opciones planteadas para cada uno de los ítems correspondientes a generalización?			
7	¿Agregaría, eliminaría o modificaría algún elemento en relación con los ítems de generalización?			
8	¿Considera usted los ítems correspondientes a inducción son congruentes con las características propias de esta escala?			
9	¿Considera que los ítems correspondientes a inducción reflejan el dominio específico del contenido que se procura medir?			
10	¿Considera usted que los ítems correspondientes a inducción responden a las características del estudiante costarricense en esta escala del DPLM? Redacción, vocabulario, forma			
11	¿Considera apropiada la estructura, relación del enunciado y opciones planteadas para cada uno de los ítems correspondientes a inducción?			
12	¿Agregaría, eliminaría o modificaría algún elemento en relación con los ítems de inducción?			
13	¿Considera usted los ítems correspondientes a deducción son congruentes con las características propias de esta escala?			
14	¿Considera que los ítems correspondientes a deducción reflejan el dominio específico del contenido que se procura medir?			

15	¿Considera usted que los ítems correspondientes a deducción responden a las características del estudiante costarricense en esta escala del DPLM? Redacción, vocabulario, forma			
16	¿Considera apropiada la estructura, relación del enunciado y opciones planteadas para cada uno de los ítems correspondientes a deducción?			
17	¿Agregaría, eliminaría o modificaría algún elemento en relación con los ítems de deducción?			
16	¿Considera usted los ítems correspondientes a uso símbolos y lenguaje matemático son congruentes con las características propias de esta escala?			
17	¿Considera que los ítems correspondientes a uso símbolos y lenguaje matemático reflejan el dominio específico del contenido que se procura medir?			
18	¿Considera usted que los ítems correspondientes a uso símbolos y lenguaje matemático responden a las características del estudiante costarricense en esta escala del DPLM? Redacción, vocabulario, forma			
19	¿Considera apropiada la estructura, relación del enunciado y opciones planteadas para cada uno de los ítems correspondientes a uso símbolos y lenguaje matemático?			
20	¿Agregaría, eliminaría o modificaría algún elemento en relación con los ítems de uso símbolos y lenguaje matemático?			
21	¿Considera usted los ítems correspondientes a razonamiento lógico son congruentes con las características propias de esta escala?			
22	¿Considera que los ítems correspondientes a razonamiento lógico reflejan el dominio específico del contenido que se procura medir?			
23	¿Considera usted que los ítems correspondientes a razonamiento lógico responden a las características del estudiante costarricense en esta escala del DPLM? Redacción, vocabulario, forma			
24	¿Considera apropiada la estructura, relación del enunciado y opciones planteadas para cada uno de los ítems correspondientes razonamiento lógico?			
25	¿Agregaría, eliminaría o modificaría algún elemento en relación con los ítems de razonamiento lógico?			
26	¿Considera usted los ítems correspondientes a demostración matemática son congruentes con las características propias de esta escala? Redacción, vocabulario, forma.			
27	¿Considera que los ítems correspondientes a demostración matemática reflejan el dominio específico del contenido que se procura medir?			
28	¿Considera usted que los ítems correspondientes a demostración matemática responden a las características del estudiante costarricense en esta escala del DPLM?			
29	¿Considera apropiada la estructura, relación del enunciado y opciones planteadas para cada uno de los ítems correspondientes a demostración matemática?			
30	¿Agregaría, eliminaría o modificaría algún elemento en relación con los ítems de demostración matemática?			
31	Presenta con claridad las instrucciones generales y específicas de cada ítem			
32	Presenta enunciados ambiguos			
33	La numeración de los ítems es pertinente			
34	Existen ítems que sirven de apoyo a la respuesta de otros			
35	Considera que los cuadros y figuras que aparecen en el test son claros y pertinentes. ¿Incorporaría en alguno de ellos elementos adicionales o eliminaría elementos existentes?			

36	Presenta claridad en la redacción de los ítems			
37	Existe ortografía en la redacción de los ítems			
38	Hay corrección en el lenguaje y símbolos matemáticos incluidos en los ítems.			
39	Presenta un adecuado uso de la puntuación y concordancia gramatical			

Indique cuáles ítems no cumplen con los criterios establecidos.______________________________

¿Cuánto tiempo considera que tardaría un estudiante de undécimo año de colegio académico diurno completando debidamente ese cuestionario? ___________________________

Observaciones y sugerencias:

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

____

Firma de quien valida

ANEXO N° 4

INSTRUCTIVO PARA LA APLICACIÓN DEL TEST DE EVALUACION DEL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO LÓGICO-MATEMÁTICO

1. El Profesor que aplica la prueba debe presentarse a la Dirección del Colegio asignado, quince minutos de la hora fijada como inició del para saludar al Director, y averiguar con certeza determinar el aula en la que se realizará la prueba.

2. Debe vestir formalmente y llevar consigo el sobre con las copias del Test y las Hojas de Respuesta.

3. Organizar a los estudiantes en el aula, de forma tal que cada quien tenga una mesa para escribir y no se produzcan áreas de sobreacumulación de estudiantes.

4. Saludar a los estudiantes y explicarles brevemente la naturaleza de la prueba y los objetivos que persigue. Asegurarse de que cada estudiante tenga lápiz para responder la prueba.

5. Distribuir las "Hojas de respuestas" a todos los estudiantes y cerciorarse de que escriban en ella, su nombre completo y el número de su cédula de identidad.

6. Señalar a los estudiantes que deben trabajar individualmente y escribir únicamente en la "Hoja de respuestas"

7. Entregar la fórmula de test a cada alumno a la hora establecida. Debe leer y explicar las instrucciones que vienen en la carátula del examen.

8. Si algún estudiante presenta dudas en relación con las preguntas del examen, el administrador podrá clarificarla de manera que no perturbe la realización de la prueba.

9. Los administradores deben evitar todo tipo de distracción en el proceso del cuido de los exámenes como son: leer libros o periódicos, uso de celulares, equipos portátiles de audio, computadoras portátiles y cualquier otro elemento que interrumpa su buena labor.

10. El administrador de la prueba debe indicar cuando faltan 20 minutos y cuando faltan 10 minutos para terminar la prueba.

11. Al entregar la prueba el administrador debe verificar que en la Hoja de Respuestas conste el nombre y número de cédula del estudiante y agradecerle por su colaboración.

12. Al finalizar la prueba debe guardar todas las Hojas de Respuesta, numeradas, en el sobre especial que se le entregó para ello y sellarlo. Las fórmulas del test se guardan en el otro sobre separado que se entrega con ese fin.

13. Terminada la prueba y después de verificar que el aula está en orden, visita al Director para despedirse y agradecerle su apoyo al proyecto.

ANEXO N°5

Análisis factorial para cada una de las escalas de Shatnawi de pensamiento lógico-matemático

Cada uno de los ítems carga significativamente en cada factor

Generalización	
G-4	0,686
G-1	0,676
G-3	0,609
G-2	0,599

Inducción	
I-3	0,706
I-4	0,704
I-1	0,651
I-2	0,616

Deducción	
D-3	0,705
D-2	0,640
D-4	0,608
D-1	0,594

Uso de símbolos	
S-4	0,748
S-1	0,724
S-3	0,691
S-2	0,634

Razonamiento lógico	
R-4	0,760
R-3	0,757
R-2	0,721
R-1	0.670

Demostración Matemática.	
P-4	0,711
P-1	0,667
P-2	0,646
P-3	0.625

ANEXO 6

EXAMEN DE BACHILLERATO MATEMÁTICAS - 2011
CONVOCATORIA ORDINARIA – COLEGIOS ACADÉMICOS DIURNOS
ITEMS CORRESPONDIENTES A ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

ÁLGEBRA

1) Una solución de $-3x^2 + 2x + 5 = -\frac{1-4x}{4}$ es

A) $-\frac{3}{2}$

B) $-\frac{7}{6}$

C) $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$

D) $\frac{-1+\sqrt{73}}{12}$

2) El conjunto solución de $2x^2 - 3x = (x-1)^2$ es

A) $\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

B) $\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

C) $\left\{\frac{3-\sqrt{21}}{6}, \frac{3+\sqrt{21}}{6}\right\}$

D) $\left\{\frac{5-\sqrt{13}}{6}, \frac{5+\sqrt{13}}{6}\right\}$

3) Considere el siguiente enunciado:

El perímetro de un rectángulo es 76 y su área es 360. ¿Cuál es la medida del ar del rectángulo?

Si "x" representa la medida del ancho del rectángulo, entonces una ecuación permite resolver el problema anterior es

A) $x(38-x) = 360$

B) $x(76-x) = 360$

C) $x(38-x) = 720$

D) $x(76-x) = 720$

4) Uno de los factores de $-9x^2+3x-\frac{1}{4}$ es

A) $3x + 1$

B) $6x + 1$

C) $1 - 3x$

D) $1 - 6x$

5) Uno de los factores de $x^2-6xy-9+9y^2$ es

A) $x - 3$

B) $2x - 3y$

C) $x - 3y + 3$

D) $x + 3y + 3$

6) Uno de los factores de $x^2+xy-2y-4$ es

A) $x - y$

B) $x + 2$

C) $x + y + 2$

D) $x + y - 2$

7) La expresión $\frac{m-n}{m+n} + \frac{m^2+6mn+n^2}{m^2-n^2}$ es equivalente a

A) $\frac{2}{m-n}$

B) $\frac{2(m+n)}{m-n}$

C) $\frac{2m(m+2n)}{m^2-n^2}$

D) $\frac{m^2+4mn+n^2}{m^2-n^2}$

8) La expresión $\frac{3x^3-75x}{x^3} \div \frac{x^2-10x+25}{x^2}$ es equivalente a

A) $\frac{x+5}{x-2}$

B) $3(x + 5)$

C) $\frac{3(x+5)}{x-5}$

D) $\frac{3x(x+5)}{x-5}$

9) La suma de dos números es 77. El mayor equivale al doble del menor aumentac en 8. ¿Cuál es el número menor?

A) 20

B) 23

C) 31

D) 35

GEOMETRÍA

39) Si r_1 y r_2 representan las medidas de los radios de dos circunferencias tangentes exteriormente, con $r_1 > r_2$, entonces, la distancia entre los centros de tales circunferencias es

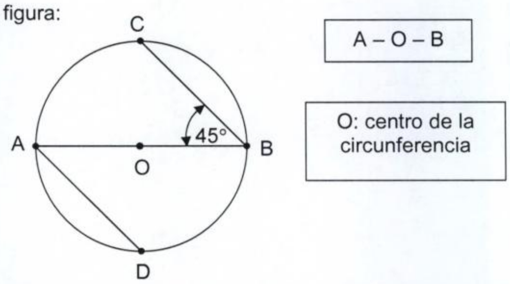
A) igual que $r_1 + r_2$.

B) igual que $r_1 - r_2$.

C) menor que $r_1 - r_2$.

D) mayor que $r_1 + r_2$.

40) Considere la siguiente figura:



De acuerdo con los datos de la figura, si $\overline{AD}$ y $\overline{CB}$ son cuerdas equidistantes del centro y $AB = 8$, entonces la medida de $\overline{AD}$ es

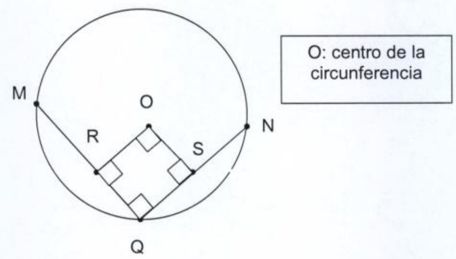
A) 2

B) 4

C) $2\sqrt{2}$

D) $4\sqrt{2}$

41) Considere la siguiente figura:



De acuerdo con los datos de la figura, si OR = OS, entonces con certeza se cumple que

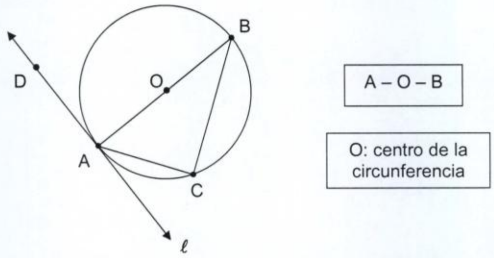
A) OS = SN

B) OM = RN

C) MR = 2 SN

D) RN = 2 MR

42) Considere la siguiente figura:



De acuerdo con los datos de la figura, si ℓ es tangente a la circunferencia en A y m∡ABC = 40°, entonces m∡DAC es

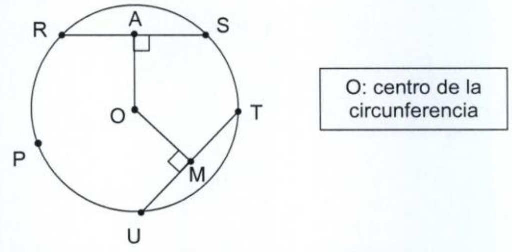
A) 100°

B) 130°

C) 140°

D) 170°

43) Considere la siguiente figura:



De acuerdo con los datos de la figura, si AO = MO, m $\widehat{RPU}$ = 196° y m$\widehat{ST}$ = 32°, entonces la medida de $\widehat{RS}$ es

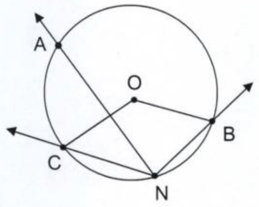
A) 64°

B) 66°

C) 98°

D) 132°

44) Considere la siguiente figura:



O: centro de la circunferencia

De acuerdo con los datos de la figura, si m∡COB = 100°, m∡ANB = 70° y m $\overset{\frown}{CN}$ = 40°, entonces, ¿cuál es la m∡CNA?

A) 35°

B) 50°

C) 60°

D) 70°

45) Si el área de un sector circular determinado por un ángulo de 60° es 2π, entonces, ¿cuál es la longitud de la circunferencia?

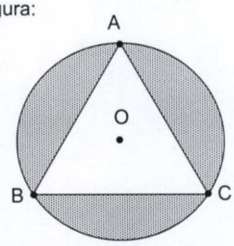
A) 12π

B) 24π

C) $2\pi\sqrt{6}$

D) $4\pi\sqrt{3}$

46) Considere la siguiente figura:



O: centro de la circunferencia

De acuerdo con los datos de la figura, si el $\triangle ABC$ es equilátero y la longitud de la circunferencia es 16π, entonces el área de la región destacada con gris es

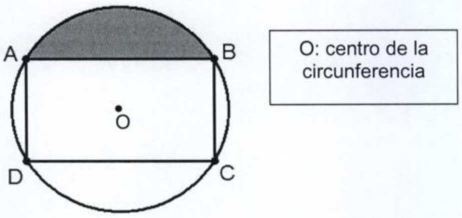
A) $16\pi - 8\sqrt{3}$

B) $16\pi - 12\sqrt{3}$

C) $64\pi - 48\sqrt{3}$

D) $64\pi - 96\sqrt{3}$

47) Considere la siguiente figura:



De acuerdo con los datos de la figura, si ABCD es un rectángulo, $AB = 6\sqrt{3}$ y $BC = 6$, entonces el área de la región destacada con gris corresponde a

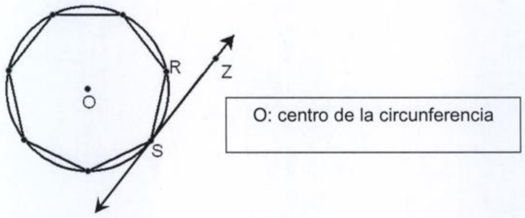
A) $3\pi - 3\sqrt{3}$

B) $6\pi - 6\sqrt{3}$

C) $12\pi - 6\sqrt{3}$

D) $12\pi - 9\sqrt{3}$

48) Considere la siguiente figura:



De acuerdo con los datos de la figura, si el heptágono regular está inscrito en la circunferencia y $\overleftrightarrow{SZ}$ es tangente en S a la circunferencia, entonces $m\measuredangle RSZ$ es aproximadamente

A) 22,50°

B) 25,71°

C) 51,43°

D) 64,29°

49) ¿Cuál es el área de un triángulo equilátero circunscrito a un círculo cuya medida de radio es 7?

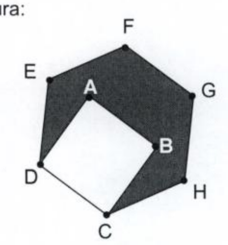
A) $147\sqrt{3}$

B) $294\sqrt{3}$

C) $\frac{196}{3}\sqrt{3}$

D) $\frac{147}{4}\sqrt{3}$

50) Considere la siguiente figura:



De acuerdo con los datos de la figura, si □ ABCD es un cuadrado y la medida de la apotema del hexágono regular CDEFGH es $\sqrt{3}$, entonces, ¿cuál es el área de la región destacada con gris?

A) 6

B) $6\sqrt{3}-4$

C) $3\sqrt{3}-4$

D) $\frac{9\sqrt{3}}{2}-3$

51) Si el área lateral de una pirámide recta de base cuadrada es 432 y la medida de la apotema de la pirámide es 18, entonces el volumen de la pirámide corresponde a

A) $288\sqrt{5}$

B) $576\sqrt{2}$

C) $4608\sqrt{7}$

D) $5184\sqrt{2}$

52) El volumen de un cono circular recto es 729π y la altura es el triple del radio de la base. ¿Cuál es el área lateral del cono?

A) 243π

B) $81\pi\sqrt{10}$

C) $162\pi\sqrt{10}$

D) $729\pi\sqrt{10}$

Acti labores iucundi