HUGO BARRANTES

INTEGRALES EN COORDENADAS POLARES Y PARAMÉTRICAS

Material complementario

UNED
UNIVERSIDAD ESTATAL A DISTANCIA
Institución Benemérita de la Educación y la Cultura

Producción académica
y asesoría metodológica

Mario Marín Romero

Revisión filológica
Vanessa Villalobos Rodríguez

Diagramación
Hugo Barrantes Campos

Encargado de cátedra
Eugenio Rojas Mora

Esta guía de estudio ha sido confeccionada en la Uned, en el año 2011, para ser utilizada en la asignatura "Cálculo integral", código 178, que se imparte en los programas de profesorado y bachillerato en Enseñanza de la Matemática.

Universidad Estatal a Distancia
Vicerrectoría Académica
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

PRESENTACIÓN

Estaguía de estuio es un complemento del texto *Cálculo integral en una variable*; a lo largo de dicho texto, se utiliza el sistema de coordenadas rectangulares para trabajar con funciones, curvas, gráficas y, en general, con el cálculo de integrales. Sin embargo, el cálculo de áreas de ciertas regiones puede hacerse de modo más eficiente mediante el uso de coordenadas polares; así como para el cálculo de la longitud de arco de cierto tipo de curvas es más efectivo parametrizar la curva. Aquí, se hace un repaso sobre coordenadas polares y curvas paramétricas y se utilizan para calcular áreas y longitudes de arco.

El formato de estaguía es semejante al del texto citado. En general, se sigue una metodología en la que se tratan de deducir las técnicas que luego serán utilizadas. El tema es muy técnico, por lo tanto, aparecen pocas definiciones y teoremas; por el contrario, se provee una serie bastante amplia de ejemplos ilustrativos.

Al final, aparece una sección en la que se proporcionan las soluciones de todos los ejercicios propuestos. Estas soluciones se brindan con bastante detalle, aunque no tanto como en los ejemplos resueltos, de modo que le permitan al estudiante tener una buena guía con respecto a la forma de resolverlos.

Agradezco a Eugenio Rojas y a Mario Marín la revisión del material y sus sugerencias para mejorarlo.

CONTENIDOS

OBJETIVOS

- Utilizar las coordenadas polares en el plano para representar puntos y curvas.
- Calcular áreas limitadas por curvas en coordenadas polares mediante la aplicación de integrales.
- Determinar la longitud de curvas definidas mediante coordenadas polares mediante la aplicación de integrales.
- Expresar curvas planas mediante coordenadas paramétricas.
- Aplicar la integración para determinar áreas limitadas por curvas definidas paramétricamente.
- Aplicar la integración para calcular la longitud de curvas dadas paramétricamente.

1. Repaso de coordenadas polares

Un sistema de coordenadas polares en el plano consiste de un punto O, llamado **polo** y una semirrecta con origen en O, llamada **eje polar** (vea la figura 1).

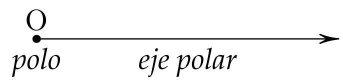


Figura 1. Sistema de coordenadas polares.

Cada punto P en el plano se representa mediante un par ordenado $P(r, \theta)$ donde r es la distancia del punto P al polo y θ es la medida del ángulo entre el eje polar y el segmento $\overline{OP}$, tal como se indica en la figura 2. Los números r y θ son las **coordenadas polares** de P y se llaman, respectivamente, **distancia radial** y **ángulo polar** del punto P en el sistema. Las coordenadas polares del polo, en tal sistema, son $(0, 0)$.

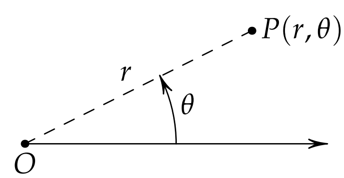


Figura 2. Coordenadas polares de P en el plano.

Aunque como polo se puede tomar cualquier punto en el plano y, como eje polar, cualquier semirrecta con origen en ese punto, se acostumbra imaginar en el plano un sistema de coordenadas rectangulares, se toma como polo el origen de dicho sistema y, como eje polar, el eje x positivo. Esto facilita el paso de un sistema de coordenadas a otro.

Ejemplo 1

Sea P el punto en el plano cuyas coordenadas rectangulares vienen dadas por $(1, 1)$, ¿Cuáles son las coordenadas polares de P?

Solución:

En la figura 3, el $\triangle OAP$ es rectángulo isósceles; por lo tanto, según el teorema de Pitágoras, la distancia de O a P es $\sqrt{2}$, entonces $r = \sqrt{2}$. Por otra parte, el segmento $\overline{OP}$ y el eje polar forman un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes (puesto que el triángulo es isósceles); por lo tanto, $\theta = \frac{\pi}{4}$. De esta manera, el punto P, en coordenadas polares, puede representarse por $P(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$, como se observa en la figura 3.

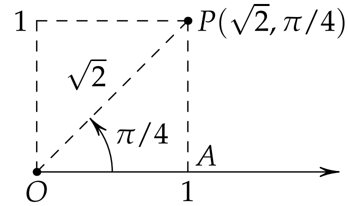


Figura 3. Representación de $P(1,1)$ en coordenadas polares.

□

En el ejemplo anterior se dice que el punto P de coordenadas rectangulares $(1,1)$ puede representarse en coordenadas polares mediante $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$. Esto, por cuanto no hay una forma única de representar los puntos del plano en coordenadas polares. Por ejemplo, considerando este mismo punto P, se observa que $\overline{OP}$ no solo forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el eje polar, sino también forma un ángulo de $\frac{9}{4}\pi$ radianes (e infinitas medidas más, vea la figura 4). De este modo, P también puede representarse en coordenadas polares mediante $(\sqrt{2}, \frac{9}{4}\pi)$.

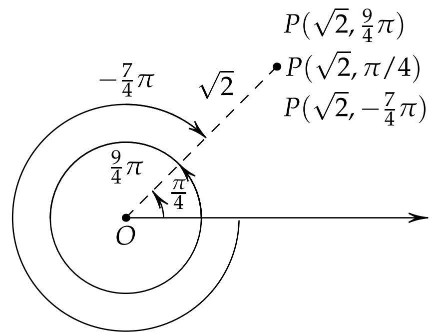


Figura 4. Varias representaciones de $P(1,1)$ en coordenadas polares.

Ahora se consideran los puntos $P(1,1)$ y $Q(-1,-1)$ (ambos en coordenadas cartesianas). Si se trazan en un sistema de coordenadas cartesianas, se nota que P es la reflexión de Q con respecto al origen; por otra parte, Q se puede representar en coordenadas polares mediante $(\sqrt{2}, \frac{5}{4}\pi)$, según se ilustra en la siguiente figura.

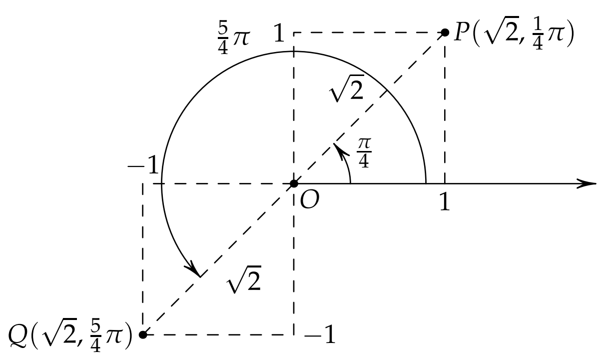


Figura 5. P es la reflexión de Q con respecto a O.

De acuerdo con el comentario anterior, otra forma posible de representar P, en coordenadas polares, es mediante $(-\sqrt{2}, \frac{5}{4}\pi)$, dado que P es la reflexión de Q.

En general, si P se escribe en coordenadas polares mediante (r, θ), entonces también puede representarse mediante $(r, \theta + n\pi)$, para cualquier número entero n, o mediante $(-r, \theta + \pi)$.

Se denominan **representaciones principales** del P a las representaciones:

- (r, θ), donde $0 \leq \theta < 2\pi$.
- $(-r, \theta + \pi)$, donde $-\pi \leq \theta < \pi$.

Ejemplo 2

En el ejemplo 1 se determinó que el punto $(1, 1)$ puede escribirse en coordenadas polares como $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$. Según los comentarios anteriores, también se puede escribir como $(-\sqrt{2}, \frac{5}{4}\pi)$. Estas son las representaciones principales de dicho punto. $\square$

1. 1. Relación entre coordenadas polares y rectangulares

Considere, en el plano, un sistema de coordenadas rectangulares y un sistema de coordenadas polares, de manera que el polo coincida con el origen $O(0, 0)$ y el eje polar coincida con el semieje positivo x, tal como se observa en la figura 6.

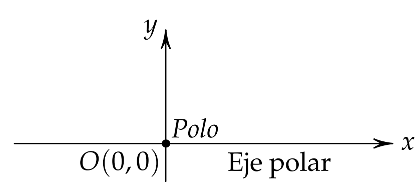


Figura 6. Coordenadas polares y rectangulares en el plano.

Ahora, considere un punto P en el plano cuyas coordenadas rectangulares sean (x, y) y sus coordenadas polares principales sean (r, θ) $(r \geq 0)$. Para ver qué relación existe entre estos dos pares de números, se traza el triángulo rectángulo de vértices O, P y A, donde las coordenadas rectangulares de A son $(x, 0)$ (vea la figura 7).

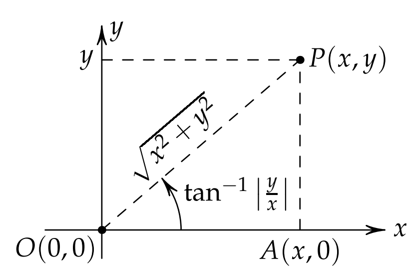


Figura 7. Relación entre coordenadas polares y rectangulares.

Por trigonometría se cumple que

$$x = r\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{1}$$

Estas ecuaciones establecen la relación entre ambos tipos de coordenadas. Las dos ecuaciones anteriores permiten el paso de coordenadas polares a rectangulares; para determinar la forma de cambiar de coordenadas rectangulares a polares, se despejan r y θ, a partir de las ecuaciones (1). Si se elevan al cuadrado ambos miembros en las dos ecuaciones y se suman los resultados, se obtiene

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \cos^2 \theta + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \\ &= r^2(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) = r^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por otra parte, de (1): $\frac{y}{x} = \frac{r \operatorname{sen} \theta}{r \cos \theta} = \tan \theta$ si $x \neq 0$. De modo que $\tilde{\theta} = \tan^{-1} \left|\frac{y}{x}\right|$ si $x \neq 0$, donde $\tilde{\theta}$ es el ángulo positivo menor que $\overline{OP}$ forma con el eje x. Si $x = 0$, entonces se toma $\tilde{\theta} = \frac{\pi}{2}$.

En resumen, para pasar de coordenadas rectangulares a coordenadas polares, se utilizan las ecuaciones

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \theta = \tan^{-1} \left|\frac{y}{x}\right|, \text{ si } x \neq 0. \tag{2}$$

Si P está en el primer cuadrante, entonces su representación en coordenadas polares es $P(r, \tilde{\theta})$; si está en el segundo cuadrante, entonces es $P(r, \pi - \tilde{\theta})$; si está en el tercer cuadrante, es $P(r, \pi + \tilde{\theta})$ y si está en el cuarto cuadrante, se escribe $P(r, 2\pi - \tilde{\theta})$.

El punto $(0, y)$, en coordenadas rectangulares, corresponde, en coordenadas polares, a $(|y|, \frac{\pi}{2})$ si $y > 0$ o $(|y|, \frac{3}{2}\pi)$ si $y < 0$.

Ejemplo 3

Se consideran los puntos $P(2, \frac{\pi}{3})$ y $Q(-1, \frac{7}{6}\pi)$, en coordenadas polares, escribirlos en coordenadas rectangulares.

Solución:

- Para el punto P: de acuerdo con (1),

  $$x = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad y = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

  De modo que, en coordenadas rectangulares, $P(1, \sqrt{3})$.

- Para el punto Q: otra vez se utiliza (1) y se obtiene

  $$x = -1 \cos \frac{7}{6}\pi = -1 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \text{y} \quad y = -1 \operatorname{sen} \frac{7}{6}\pi = -1 \cdot -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

  Así, en coordenadas rectangulares, se escribe $Q\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$.

Observe que también se puede escribir Q en coordenadas polares como $Q(1, \frac{\pi}{6})$. A partir de esta representación y usando (1), se obtiene el mismo resultado anterior. $\square$

Ejemplo 4

Los puntos $A(3, 2)$, $B(-1, 3)$ y $C(0, -2)$ están representados en coordenadas rectangulares; escribirlos en coordenadas polares.

Solución:

- Punto A: se tiene, de acuerdo con (2), $r = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

  Por otra parte, $\tilde{\theta} = \tan^{-1} \frac{3}{2} \approx \frac{14}{45}\pi$. Como A es un punto en el I cuadrante, sepuede escribir como $A\left(\sqrt{13}, \frac{14}{45}\pi\right)$ en coordenadas polares.

- Punto B: se tiene $r = \sqrt{10}$, $\tilde{\theta} = \tan^{-1} 3 \approx \frac{2}{5}\pi$. Como B está en el II cuadrante, entonces $\theta = \pi - \tilde{\theta} = \pi - \frac{2}{5}\pi = \frac{3}{5}\pi$. Luego, en coordenadas polares, $B\left(\sqrt{10}, \frac{3}{5}\pi\right)$.

- Punto C: se tiene $r = 2$ y como $x = 0$, $y < 0$, entonces, en coordenadas polares, se escribe $C(2, \frac{3}{2}\pi)$. $\square$

Ejemplo 5

Escribir la ecuación

$$r = \frac{4}{\operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta}$$

en coordenadas rectangulares.

Solución:

Multiplicando a ambos lados de la igualdad dada por $\operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta$, se tiene

$$r\operatorname{sen}\theta + 2r\cos\theta = 4,$$

entonces, según (1), $y + 2x = 4$. Dicha ecuación corresponde a una recta. $\square$

Ejemplo 6

Escribir la ecuación $r = 8$ en coordenadas rectangulares.

Solución:

Según (2), se tiene $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; luego, $\sqrt{x^2 + y^2} = 8$. Es decir, $x^2 + y^2 = 64$. Se observa que la ecuación corresponde a una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 8. $\square$

1. 2. Gráficas en coordenadas polares

Una de las ventajas del uso de coordenadas polares es que permite representar gráficamente, de manera sencilla, cierto tipo de curvas que en coordenadas rectangulares tienen ecuaciones complicadas y, por lo tanto, dificultan su graficación. No es el objetivo aquí proporcionar técnicas de graficación en coordenadas polares; solamente se proporcionará una serie de curvas básicas en coordenadas polares y sus correspondientes gráficas. Sin embargo, el lector puede elaborar tablas para cada ecuación. Para ello puede dar valores a θ y obtener los correspondientes valores de r; esto le dará una idea aproximada de cómo se obtienen las curvas correspondientes.

1.2.1. Circunferencias

Siguiendo el procedimiento del ejemplo 6, se deduce que la ecuación de una circunferencia con centro en el polo y radio a tiene como ecuación en coordenadas polares: $r = a$.

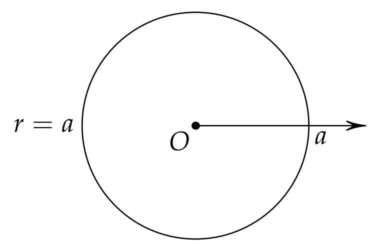


Figura 8. Circunferencia con centro en el polo y radio a.

1.2.2. Rectas

Es fácil convencerse de que la ecuación de una recta en coordenadas polares es $r(a\cos\theta + b\,\mathrm{sen}\,\theta) = c$, donde a, b, c son números reales constantes (vea el ejemplo 5). Si $b \neq 0$, la pendiente de la recta es $-\frac{a}{b}$.

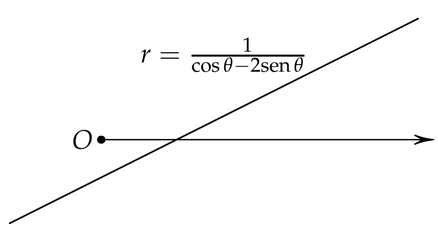


Figura 9. Recta en coordenadas polares: $r(\cos\theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta) = 1$.

Si la recta pasa por el polo y forma un ángulo α con el eje polar, entonces su ecuación es $\theta = \alpha$ (vea la figura 10).

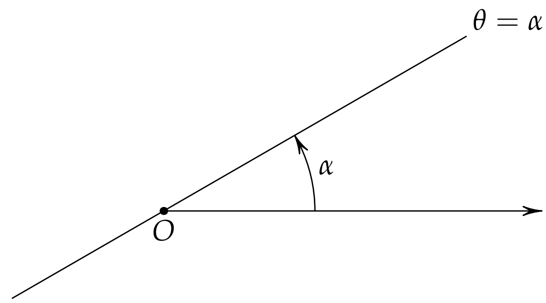


Figura 10. Recta de ecuación $\theta = \alpha$.

1.2.3. Espiral

La gráfica de la ecuación $r = \theta$, para $\theta \geq 0$ es una curva denominada espiral.

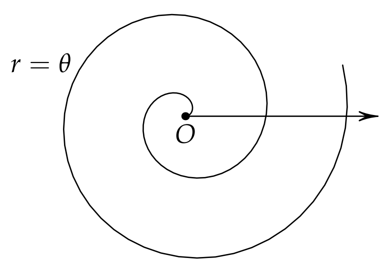


Figura 11. Espiral: $r = \theta$.

1.2.4. Cardioides

La ecuación general de las curvas llamadas cardioides es $r = a(1 - \cos\theta)$. En la siguiente figura, se representa el cardioide correspondiente a $a = 3$.

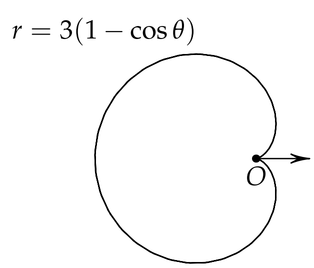


Figura 12. Cordioide de ecuación $r = 3(1 - \cos\theta)$.

1.2.5. Limaçon

La gráfica de cualquier ecuación, en coordenadas polares cuya forma es

$$r = b \pm a \cos\theta \quad \text{o} \quad r = b \pm a \operatorname{sen}\theta,$$

se llama limaçon. El caso especial en el que $a = b$ produce un cardioide. Si $b < a$, la curva tiene un lazo interior. En figura 13, se representan diferentes limaçones.

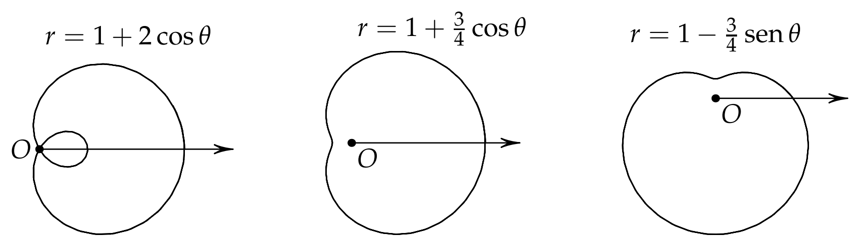


Figura 13. Diversos limaçones.

1.2.6 Rosas de n pétalos

La gráfica de una ecuación, en coordenadas polares, del tipo

$$r = a \cos n\theta \quad \text{o} \quad r = a \operatorname{sen} n\theta,$$

recibe el nombre de rosa. Si n es un número par, la rosa consta de $2n$ pétalos; si n es impar, la rosa consta de n pétalos. La figura 14 muestra varias rosas.

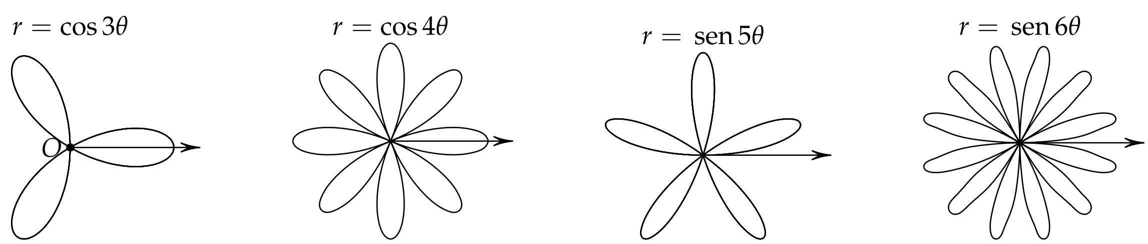


Figura 14. Diversas rosas.

1.2.7 Lemniscatas

Una lemniscata es la curva que corresponde a la gráfica de una ecuación, en coordenadas polares, del tipo

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \quad \text{o} \quad r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta.$$

El la figura 15, se muestran dos lemniscatas.

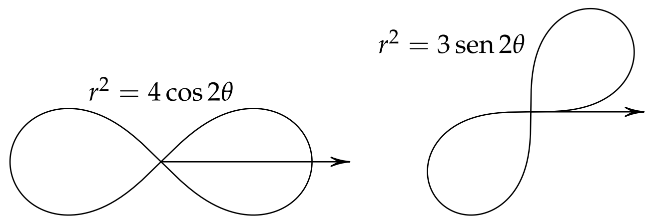


Figura 15. Lemniscatas de ecuaciones $r^2 = 4\cos 2\theta$ y $r^2 = 3\,\mathrm{sen}\,2\theta$, respectivamente.

1. 3. Secciones cónicas

Si se considera un punto fijo F en el plano, L una recta fija en el mismo plano y ε un número real positivo fijo, el conjunto de puntos P del plano que satisfacen

$$\frac{d(P,F)}{d(P,L)} = \varepsilon \tag{3}$$

es una sección cónica. El número fijo ε se llama **excentricidad** de la cónica. Si $0 < \varepsilon < 1$, la cónica es una **elipse**; si $\varepsilon = 1$, es una parábola y si $\varepsilon > 1$ se tiene una **hipérbola**. El punto F es un **foco** de la sección cónica y L es su recta **directriz**.

1.3.1. La elipse

Ahora, dótese al plano con un sistema de coordenadas polares y considérese una elipse de excentricidad ε, con un foco F en el polo y con recta directriz L dada por $x = p$ (con $p > 0$); en coordenadas polares, la ecuación de L es $r\cos\theta = p$. Sea $P(r,\theta)$ un punto en dicha elipse; observe que (vea la figura 16), $d(P,F) = r$ y $d(P,L) = p - r\cos\theta$. Así, según (3), se obtiene

$$\varepsilon = \frac{d(P,F)}{d(P,L)} = \frac{r}{p - r\cos\theta}.$$

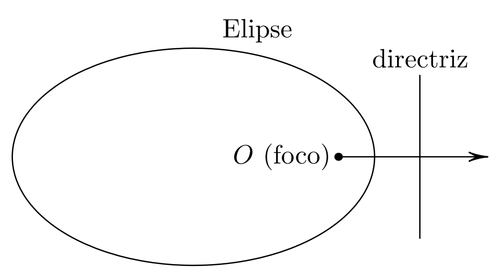


Figura 16. Elipse en coordenadas polares.

Despejando r en la ecuación anterior resulta

$$r = \frac{\varepsilon p}{1 + \varepsilon \cos\theta}. \tag{4}$$

Mediante un procedimiento análogo, se pueden obtener las ecuaciones en coordenadas polares de elipses con foco F en el polo y con directriz cualquiera de las rectas $x = -p$ o $y = p$ o $y = -p$. Las ecuaciones, respectivamente, son las siguientes:

$$r = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon \cos\theta}, \quad r = \frac{\varepsilon p}{1 + \varepsilon \operatorname{sen}\theta}, \quad r = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon \operatorname{sen}\theta} \tag{5}$$

Ejemplo 7

Considerar la elipse de ecuación $r = \dfrac{3}{3 + \operatorname{sen}\theta}$. Determinar su excentricidad, sus focos, sus vértices, su directriz y trazar la elipse.

Solución:

La ecuación puede escribirse como $r = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\theta}$, que tiene la forma de la segunda ecuación en (5). Así, $\varepsilon = \frac{1}{3}$ y $\varepsilon p = 1$, es decir, $p = 3$. Entonces, la excentricidad es $\frac{1}{3}$ y la directriz es la recta $y = 3$. Los focos se obtienen cuando $\theta = \frac{1}{2}\pi$ y $\theta = \frac{3}{2}\pi$, es decir $r = \frac{3}{4}$ y $r = \frac{3}{2}$, respectivamente. Luego, los vértices son $V_1(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\pi)$ y $V_1(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\pi)$. Uno de los focos es $F_1(0,0)$ y puesto que $d(V_1, F_1) = \frac{3}{4}$, entonces $d(F_2, V_2) = \frac{3}{4}$, por lo que $F_2(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\pi)$. La gráfica de la elipse se muestra en la figura 17.

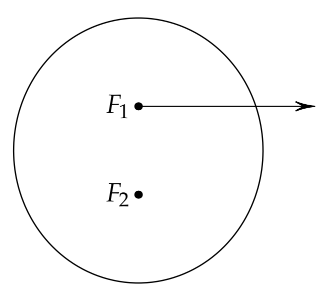


Figura 17. Gráfica de la elipse $r = \dfrac{3}{3 + \operatorname{sen}\theta}$.

$\square$

1.3.2. La hipérbola

La manera de obtener la ecuación de la hipérbola en coordenadas polares es la misma que se utilizó para la de la elipse, ya que en ambos casos se parte de la ecuación (3). Esto significa que la ecuación de la hipérbola con un foco en el polo y recta directriz $x = p$ es, también,

$$r = \frac{\varepsilon p}{1 + \varepsilon \cos\theta}. \tag{6}$$

La forma en que se sabe a qué curva corresponde una ecuación de este tipo es mediante el valor de ε (la excentricidad); si $\varepsilon > 1$, entonces la ecuación corresponde a una hipérbola y si $0 < \varepsilon < 1$, entonces corresponde a una elipse.

Las ecuaciones

$$r = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon \cos\theta}, \quad r = \frac{\varepsilon p}{1 + \varepsilon \operatorname{sen}\theta}, \quad r = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon \operatorname{sen}\theta} \tag{7}$$

también corresponden a hipérbolas en el caso de que $\varepsilon > 1$. La siguiente figura representa una hipérbola con un foco en el polo y directriz $y = p$, con $p > 0$.

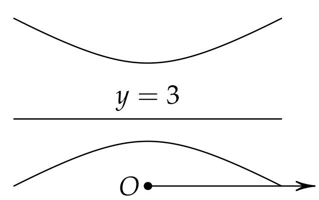


Figura 18. Gráfica de la hipérbola $r = \dfrac{6}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$.

1.3.3. La parábola

Según lo indicado previamente, la ecuación de una parábola con foco en el polo y directriz $x = p$, con $p > 0$, tiene la misma forma dada en (4) y (6) para la elipse y la hipérbola respectivamente, pero con $\varepsilon = 1$, es decir, la ecuación queda así:

$$r = \frac{p}{1 + \cos\theta}. \tag{8}$$

Las parábolas con foco en el polo y directrices $x = -p$ o $y = p$ o $y = -p$ tienen, respectivamente, las siguientes ecuaciones:

$$r = \frac{p}{1 - \cos\theta}, \quad r = \frac{p}{1 + \operatorname{sen}\theta}, \quad r = \frac{p}{1 - \operatorname{sen}\theta}. \tag{9}$$

La figura 19 representa una parábola con un foco en el polo y directriz $x = -4$.

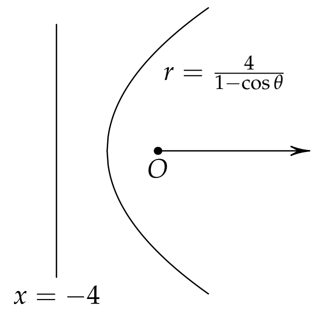


Figura 19. Gráfica de la parábola $r = \dfrac{4}{1-\cos\theta}$.

2. Integrales y áreas en coordenadas polares

En la sección 1.3 del texto se hace un desarrollo que justifica la definición formal de la integral definida de funciones descritas mediante un criterio de la forma $y = f(x)$, en un sistema de coordenadas rectangulares. En esta sección, se procederá de manera menos formal, para definir integrales de funciones representadas por $r = f(\theta)$, en un sistema de coordenadas polares.

En el caso de coordenadas rectangulares, se considera la integral sobre un intervalo de la forma $[a, b]$ en el que varía la variable independiente x; para el caso de coordenadas polares, se considerará un intervalo $[\alpha, \beta]$ en el que varía θ. Siguiendo con la analogía del caso de las coordenadas rectangulares, se considera una aproximación del área de la región limitada por las rectas $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ y la curva $r = f(\theta)$, como se muestra en la siguiente figura.

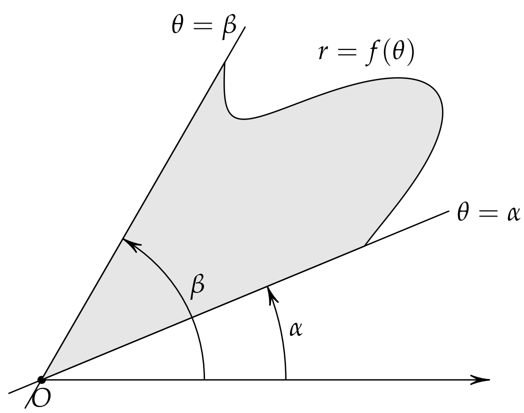


Figura 20. Región limitada por $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, $r = f(\theta)$.

Dos aproximaciones del área son el área A_1 del sector circular de radio $f(\theta_1)$ y ángulo $\beta - \alpha$ y por el área A_2 del sector circular de radio $f(\theta_2)$ y ángulo $\beta - \alpha$, donde θ_1 es el ángulo en el que f alcanza su máximo y θ_2 es el ángulo en el que f alcanza su mínimo. En la figura 21, el área A_1 corresponde a la región limitada por las rectas $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ y por el arco RS; el área A_2 corresponde a la región limitada por las rectas $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ y por el arco PQ. La primera aproxima, el área que se considera, por exceso, y la segunda por defecto.

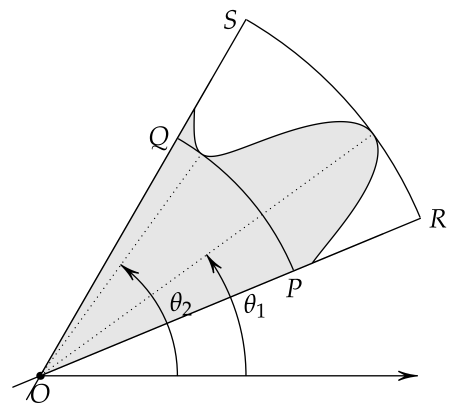


Figura 21. Aproximación por exceso y por defecto del área.

De acuerdo con la fórmula del área del sector circular,

$$A_1 = [f(\theta_1)]^2 \frac{\beta - \alpha}{2} \quad \text{y} \quad A_2 = [f(\theta_2)]^2 \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

También, se aproxima esa área mediante el área del sector circular de radio θ_0 y ángulo $\beta - \alpha$, donde θ_0 es algún ángulo entre α y β. Esta aproxima mejor el área buscada que las áreas A_1 y A_2 mencionadas previamente. En la figura 22, el sector correspondiente es el que está limitado por las rectas $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ y el arco PQ.

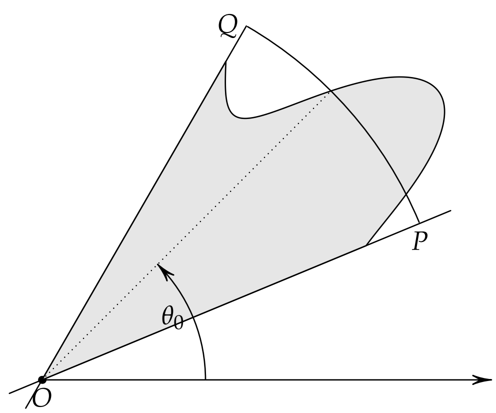


Figura 22. El área de la región OPQ aproxima el área considerada.

En este caso, la aproximación del área es:

$$A_0 = [f(\theta_0)]^2 \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Se puede hacer una partición del intervalo $[\alpha, \beta]$ en n subintervalos de la misma longitud, mediante

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n = \beta,$$

donde $\theta_i - \theta_{i-1} = \frac{\beta-\alpha}{n}$. Luego se toma $\theta_i^* \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$. El área entre la curva $r = f(\theta)$ y las rectas $\theta = \theta_{i-1}$, $\theta = \theta_i$, se aproxima por $[f(\theta_i^*)]^2 \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2}$, de manera que si A es el área que se desea calcular, entonces A es aproximada por la suma de todas las aproximaciones indicadas; es decir,

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{[f(\theta_i^*)]^2}{2} (\theta_i - \theta_{i-1}).$$

Pasando al límite, cuando n tiende a ∞:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{[f(\theta_i^*)]^2}{2} (\theta_i - \theta_{i-1}) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \, d\theta.$$

Esto permite la siguiente definición.

Definición 1

Si $r = f(\theta)$ define una curva en coordenadas polares, donde f es continua sobre el intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$, entonces la integral de r es:

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \, d\theta, \tag{10}$$

donde la integral dada por (10) se refiere al concepto de integral definido en el capítulo 1 del texto.

En particular, la expresión (10) define el área de una región limitada por $r = f(\theta)$ (en coordenadas polares) y por las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$.

Ejemplo 8

Determinar el área delimitada por el limaçon $r = 3 + 2\cos\theta$.

Solución:

La región es simétrica con respecto al eje x, por lo tanto, basta determinar el área de la mitad superior y, luego, multiplicar por dos. La mitad superior está limitada por las rectas $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Por lo tanto, el área encerrada por el limaçon es:

$$\begin{aligned}
A &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (3 + 2\cos\theta)^2 d\theta \\
&= \int_0^{\pi} (9 + 12\cos\theta + 4\cos^2\theta) d\theta \\
&= \int_0^{\pi} (11 + 12\cos\theta + 2\cos 2\theta) d\theta \\
&= [11 + 12 \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 2\theta]_0^{\pi} \\
&= 11\pi.
\end{aligned}$$

□

2. 1. Rectas tangentes en coordenadas polares

Suponga que se desea determinar el área encerrada por uno de los pétalos de la rosa de ecuación $r = 2\cos 3\theta$, cuya gráfica se muestra en la figura siguiente:

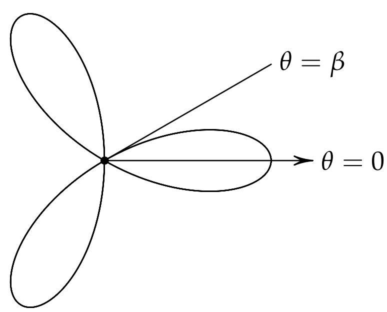


Figura 23. Gráfica de la rosa $r = 2\cos 3\theta$.

Todos los pétalos tienen la misma área, así que considérese el pétalo de la derecha; éste es simétrico con respecto al eje x, por lo que basta calcular el área de la mitad superior y multiplicar el resultado por dos. Es evidente que esta mitad superior tiene como uno de sus límites la recta $\theta = 0$ y el otro límite es la recta $\theta = \beta$ (usando la notación de la figura). Nos preguntamos ¿cuánto mide el ángulo β? Para dar una respuesta, lo primero que se observa es que la recta $\theta = \beta$ es tangente, en el polo, al pétalo de la rosa. ¿Cómo se calcula tal pendiente?

Sea $r = f(\theta)$ una función derivable. Recuerde que la pendiente de la recta tangente a una curva $y = h(x)$ (en coordenadas rectangulares) en un punto, es igual a la derivada $\frac{dy}{dx}$ evaluada en ese punto. Por otra parte, se sabe que las coordenadas polares (r, θ)

y las coordenadas rectangulares (x, y) se relacionan según las ecuaciones: $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, por lo que

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{11}$$

De acuerdo con la regla de la cadena, se deduce que

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\theta},$$

es decir,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}. \tag{12}$$

Recuerde que una recta tangente en un punto es horizontal si $\frac{dy}{dx} = 0$ en ese punto; de acuerdo con (12), esto sucede cuando $\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ y $\dfrac{dx}{d\theta} \neq 0$. Por otra parte, una recta tangente es vertical si $\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ y $\dfrac{dy}{d\theta} \neq 0$; en este caso, el ángulo que forma con la recta que contiene al eje polar es $\frac{\pi}{2}$. Si ambas derivadas, $\dfrac{dx}{d\theta}$ y $\dfrac{dy}{d\theta}$ son iguales a 0, debe realizarse otro tipo de análisis para determinar la pendiente de la recta tangente en el punto dado.

Ejemplo 9

Determinar la ecuación, en coordenadas polares, de la recta tangente a la curva $r = 2\cos 3\theta$, en el polo.

Solución:

A partir de (11) se deduce que

$$\begin{aligned} x &= (2\cos 3\theta)\cos\theta \\ y &= (2\cos 3\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{dx}{d\theta} = 2(-3\,\mathrm{sen}\,3\theta\cos\theta - \cos 3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = 2(-3\,\mathrm{sen}\,3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos 3\theta\cos\theta).$$

Luego,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3\,\mathrm{sen}\,3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos 3\theta\cos\theta}{-3\,\mathrm{sen}\,3\theta\cos\theta - \cos 3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}. \tag{13}$$

La curva dada pasa por el polo cuando $r = 0$, es decir, cuando $2\cos 3\theta = 0$ (pues la ecuación de la curva es $r = 2\cos 3\theta$). Por lo tanto, $\cos 3\theta = 0$ y, entonces, $3\theta = \frac{\pi}{2}$, es decir, $\theta = \frac{\pi}{6}$. Evaluando la expresión (13) en $\theta = \frac{\pi}{6}$, se obtiene que la pendiente de la recta tangente a determinar es:

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{-3\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{6}}{-3\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \tan\frac{\pi}{6}.$$

Esto significa que si β es el ángulo que forma la recta con el eje polar, entonces $\tan\beta = \tan\frac{\pi}{6}$ y, por consiguiente, $\beta = \frac{\pi}{6}$. Por otra parte, la recta pasa por el origen (que coincide con el polo); por lo tanto, su ecuación en coordenadas polares es $\theta = \frac{\pi}{6}$. □

Ejemplo 10

Determinar la pendiente de la recta tangente al cardioide $r = 2(1 - \cos\theta)$ en el punto $(2, \frac{\pi}{2})$.

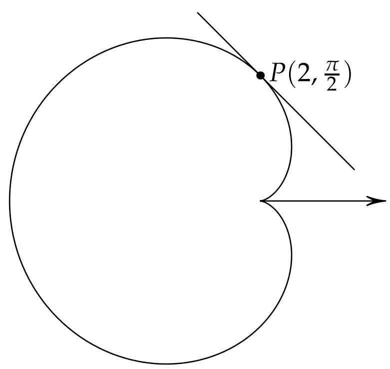


Figura 24. Cardioide $r = 2(1 - \cos\theta)$ y su tangente en el punto $(2, \frac{\pi}{2})$.

Solución:

De acuerdo con (11) se obtiene

$$x = 2(1 - \cos\theta)\cos\theta, \quad y = 2(1 - \cos\theta)\operatorname{sen}\theta.$$

Luego,

$$\frac{dx}{d\theta} = 2(\operatorname{sen}\theta\cos\theta - (1 - \cos\theta)\operatorname{sen}\theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = 2(\operatorname{sen}^2\theta + (1 - \cos\theta)\cos\theta).$$

Por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(\operatorname{sen}^2\theta + (1 - \cos\theta)\cos\theta)}{2(\operatorname{sen}\theta\cos\theta - (1 - \cos\theta)\operatorname{sen}\theta)} = \frac{1 + \cos\theta - 2\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta(2\cos\theta - 1)}.$$

Evaluando en $\theta = \frac{\pi}{2}$, se obtiene

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{2} - 2\cos^2\frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}(2\cos\frac{\pi}{2} - 1)} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Es decir, la pendiente de la recta es $m = -1$. □

Ejemplo 11

Determinar el área encerrada por uno de los pétalos de la rosa de ecuación $r = 2\cos 3\theta$. En la siguiente figura se representa solamente el pétalo de la derecha de la rosa.

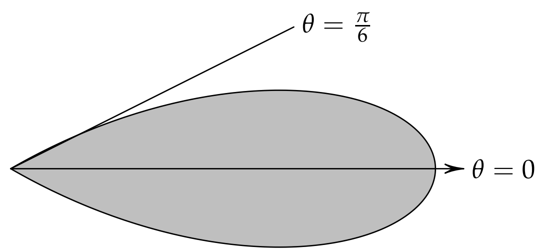


Figura 25. El área de un pétalo de la rosa corresponde a la región sombreada.

Solución:

Como se comentó anteriormente, se puede tomar el área de la mitad superior del pétalo de la derecha y multiplicar por 2. El área de esta mitad superior corresponde a la de la región limitada por las rectas $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{6}$ (según lo obtenido en el ejemplo 9), de modo que el área buscada es:

$$\begin{aligned} A &= 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\cos^2 3\theta\, d\theta\right] \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 6\theta)\, d\theta \\ &= 2\left(\theta + \frac{1}{6}\operatorname{sen} 6\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= 2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{6}\operatorname{sen}\pi\right) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

□

2. 2. Intersección de curvas en coordenadas polares

Suponga que se desea determinar el área entre las dos circunferencias $r = 4\cos\theta$ y $r = -4\,\mathrm{sen}\,\theta$; esto es, la región sombreada en la figura siguiente.

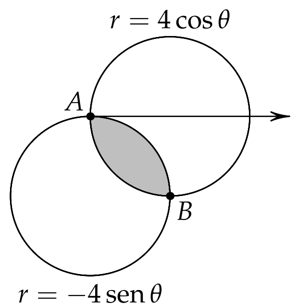


Figura 26. Región limitada por los círculos $r = -4\,\mathrm{sen}\,\theta$ y $r = 4\cos\theta$.

Para ello, se requiere conocer cuáles son los puntos en los que estas curvas se intersecan (los puntos señalados con A y B en la figura anterior). ¿Cuáles son esos puntos?

Cuando las curvas se dan en coordenadas rectangulares, encontrar su intersección se reduce a determinar las soluciones del sistema de ecuaciones que las definen; no se necesita trazar sus gráficas. Esto se debe a que hay una correspondencia biunívoca entre los pares ordenados que satisfacen la ecuación y los puntos en el gráfico. Sin embargo, si las ecuaciones de las curvas están en forma polar, esta correspondencia biunívoca no se da, puesto que un punto corresponde con infinidad de pares ordenados. En este caso, a menudo es necesario dibujar las curvas para ver cuántos puntos de intersección existen y asegurarse de que se determinan todos los que se requieren.

Para el caso de las dos circunferencias mencionadas, primero se resuelve el sistema de ecuaciones

$$r = 4\cos\theta \tag{14}$$

$$r = -4\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{15}$$

Al igualar (14) y (15) se obtiene $4\cos\theta = -4\,\mathrm{sen}\,\theta$; de aquí, $\tan\theta = -1$. Para considerar las representaciones principales de los puntos de intersección, se buscan los valores de θ en el intervalo $[0, 2\pi[$ que satisfacen esta ecuación; esto son: $\theta = \frac{3}{4}\pi$ y $\theta = \frac{7}{4}\pi$.

Sustituyendo $\theta = \frac{3}{4}\pi$ en la ecuación (14) resulta $r = 4\cos\frac{3}{4}\pi = -2\sqrt{2}$; de donde se obtiene el punto $(-2\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi)$.

Sustituyendo $\theta = \frac{7}{4}\pi$ en la ecuación (14) se tiene $r = 4\cos\frac{7}{4}\pi = 2\sqrt{2}$; de donde se obtiene el punto $(2\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi)$.

Pero estos dos puntos en coordenadas polares corresponden a un mismo punto (vea la página 3), que es el punto B en la figura 26.

Así, en este caso, algebraicamente solo se obtiene uno de los puntos de intersección; sin embargo, la gráfica indica que hay dos de estos puntos y el polo es uno de ellos. En coordenadas polares, el polo se representa por $(0,0)$, por lo que $r = 0$; sustituyendo en la ecuación (14): $0 = 4\cos\theta$; es decir, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Sustituyendo en la ecuación (15): $0 = -4\operatorname{sen}\theta$; es decir, $\theta = \pi$. Pero $(0,0)$, $(0, \frac{\pi}{2})$ y $(0,\pi)$ son representaciones del polo, por lo que se concluye que el polo es otro punto de intersección (el punto A en la figura).

Se reitera que si se quiere determinar los puntos de intersección de dos curvas en coordenadas polares: primero, se buscan algebraicamente las soluciones del sistema de ecuaciones que ellas producen y, luego, se estudia la gráfica de ambas para verificar si el proceso algebraico detectó todos los puntos o si dejó alguno por fuera. Por otra parte, se debe hacer una revisión para determinar si el polo es un punto de intersección de ambas representaciones.

Ejemplo 12

Determinar los puntos de intersección de las curvas $r = 3\cos 3\theta$ (una rosa de tres pétalos) y $r = 2\cos\theta$ (una circunferencia); esto es, los puntos A, B y C en la siguiente figura.

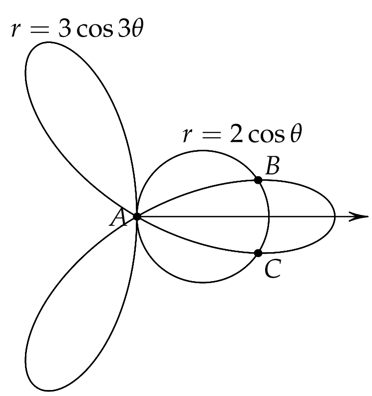


Figura 27. Intersección de las curvas $r = 3\cos 3\theta$ y $r = 2\cos\theta$.

Solución:

Procediendo algebraicamente por igualación se deduce:

$$3\cos 3\theta = 2\cos\theta. \tag{16}$$

Utilizando identidades trigonométricas básicas (coseno de la suma, coseno del ángulo doble), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta) \\
&= \cos 2\theta \cos\theta - \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen}\theta \\
&= (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\theta \\
&= (\cos^2\theta - (1-\cos^2\theta))\cos\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta \\
&= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta \\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.
\end{aligned}$$

Por lo que la ecuación (16) se convierte en

$$12\cos^3\theta - 9\cos\theta = 2\cos\theta,$$

que es equivalente a

$$\cos\theta(\sqrt{12}\cos\theta - \sqrt{11})(\sqrt{12}\cos\theta + \sqrt{11}) = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son aquellos valores de θ tales que

$$\cos\theta = 0 \quad \text{o} \quad \cos\theta = \sqrt{\frac{11}{12}} \quad \text{o} \quad \cos\theta = -\sqrt{\frac{11}{12}}.$$

Los valores de θ (en el intervalo $[0, 2\pi[$) que satisfacen alguna de estas ecuaciones son:

$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{3}{2}\pi, \quad \cos^{-1}\sqrt{\frac{11}{12}}, \quad 2\pi - \cos^{-1}\sqrt{\frac{11}{12}}, \quad \pi - \cos^{-1}\sqrt{\frac{11}{12}}, \quad \pi + \cos^{-1}\sqrt{\frac{11}{12}}.$$

Sustituyendo –en el orden dado– estos valores en la ecuación de la circunferencia, se obtienen, respectivamente, los siguientes valores de r:

$$0, \quad 0, \quad \sqrt{\frac{11}{3}}, \quad \sqrt{\frac{11}{3}}, \quad -\sqrt{\frac{11}{3}}, \quad -\sqrt{\frac{11}{3}}.$$

De donde se obtienen los siguientes pares de coordenadas polares:

$$A_1\left(0,\tfrac{1}{2}\pi\right), \quad A_2\left(0,\tfrac{3}{2}\pi\right), \quad A_3\left(\sqrt{\tfrac{11}{3}},\cos^{-1}\sqrt{\tfrac{11}{12}}\right), \quad A_4\left(\sqrt{\tfrac{11}{3}},2\pi-\cos^{-1}\sqrt{\tfrac{11}{12}}\right),$$
$$A_5\left(-\sqrt{\tfrac{11}{3}},\pi-\cos^{-1}\sqrt{\tfrac{11}{12}}\right), \quad A_6\left(-\sqrt{\tfrac{11}{3}},\pi+\cos^{-1}\sqrt{\tfrac{11}{12}}\right).$$

A_1 y A_2 son representaciones del polo, que corresponde al punto A de la figura 27; A_3 y A_6 al punto B de la misma figura y A_4 y A_5 al punto C. En este caso, el procedimiento algebraico proporciona los tres puntos de intersección que se observan en la gráfica. □

Ejemplo 13

Determinar el área entre las circunferencias $r = 4\cos\theta$ y $r = -4\,\mathrm{sen}\,\theta$, que corresponde a la región sombreada en la figura 26.

Solución:

Trace la recta $\theta = -\frac{\pi}{2}$. La región en estudio es simétrica con respecto a esta recta; así, para determinar su área se puede calcular el área de la mitad superior y multiplicar por 2. La mitad superior está limitada por la curva $r = -4\,\mathrm{sen}\,\theta$ y las rectas $\theta = -\frac{\pi}{2}$ y $\theta = 0$ (es decir, el eje x que es tangente a la curva en el polo).

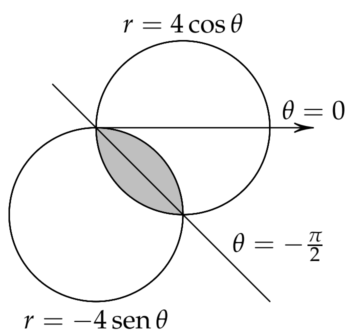


Figura 28. La región es simétrica con respecto a la recta $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Según lo anterior, el área es

$$A = 2\left[\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(-4\,\mathrm{sen}\,\theta)^2\,d\theta\right] = 8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos 2\theta)^2\,d\theta$$
$$= 8\left[\theta - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = 4\pi - 8.$$

□

Ejemplo 14

Determinar el área de la región limitada por las curvas $r = 3\cos 3\theta$ y $r = 2\cos\theta$; esto es, el área de la región sombreada en la siguiente figura.

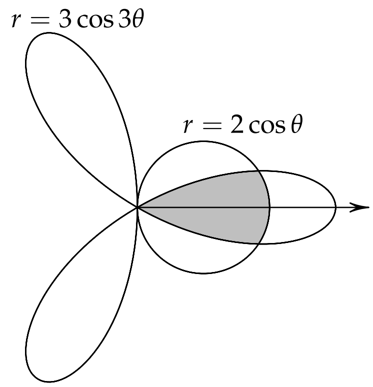


Figura 29. Región delimitada por $r = 3\cos 3\theta$ y $r = 2\cos\theta$.

Solución:

Se observa que la región es simétrica con respecto al eje x, por lo que basta calcular el área de la parte superior y multiplicar por 2. En la siguiente figura aparece sombreada solamente la parte superior de la región que interesa. Esta parte superior se puede dividir en dos regiones: la región gris claro cuya área denotaremos con A_1 y la región gris oscuro con área A_2.

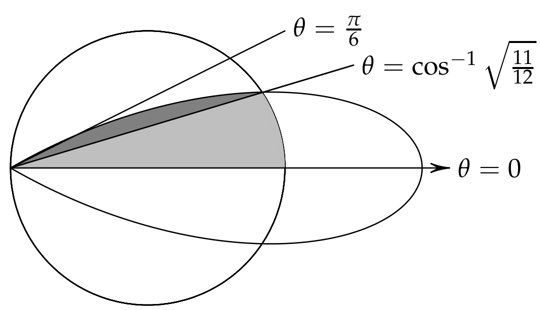


Figura 30. Se divide la parte superior en dos regiones de áreas A_1 y A_2.

La región gris claro está limitada por la curva $r = 2\cos\theta$, la recta $\theta = 0$ y la recta $\theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{11}{12}}$ (vea el ejemplo 12), de manera que

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2}\int_0^{\cos^{-1}\sqrt{\frac{11}{12}}} (2\cos\theta)^2\,d\theta = \int_0^{\cos^{-1}\sqrt{\frac{11}{12}}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta \\
&= \left[\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\cos^{-1}\sqrt{\frac{11}{12}}} = \cos^{-1}\sqrt{\frac{11}{12}} + \frac{\sqrt{11}}{12}.
\end{aligned} \tag{17}
$$

La región gris oscuro está limitada por la curva $r = 3\cos 3\theta$ y las rectas $\theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{11}{12}}$ y $\theta = \frac{\pi}{6}$. Esta última recta es tangente a la curva en el polo y se obtiene mediante un procedimiento análogo al del ejemplo 9. De acuerdo con esto,

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{2}\int_{\cos^{-1}\sqrt{\frac{11}{12}}}^{\frac{\pi}{6}} 9\cos^2 3\theta\, d\theta \\ &= \frac{9}{4}\int_{\cos^{-1}\sqrt{\frac{11}{12}}}^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 6\theta)\, d\theta \\ &= \frac{9}{4}\left[\theta + \frac{1}{6}\operatorname{sen} 6\theta\right]_{\cos^{-1}\sqrt{\frac{11}{12}}}^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{9}{4}\left(\frac{\pi}{6} - \cos^{-1}\sqrt{\frac{11}{12}} - \frac{4}{81}\sqrt{11}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

De acuerdo con (17) y (18), el área que se busca es:

$$\begin{aligned} A = 2(A_1 + A_2) &= 2\left(\cos^{-1}\sqrt{\frac{11}{12}} + \frac{\sqrt{11}}{12} + \frac{9}{4}\left(\frac{\pi}{6} - \cos^{-1}\sqrt{\frac{11}{12}} - \frac{4}{81}\sqrt{11}\right)\right) \\ &= \frac{3}{4}\pi - \frac{5}{2}\cos^{-1}\sqrt{\frac{11}{12}} - \frac{1}{18}\sqrt{11} \\ &\approx 1{,}439836. \end{aligned}$$

□

3. Longitud de arco en coordenadas polares

Recuerde que la longitud de arco de una curva dada en coordenadas rectangulares por $y = f(x)$, es:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{19}$$

Si una curva C está dada en coordenadas polares por $r = f(\theta)$, entonces, según la explicación en la página 16, se obtiene:

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta,$$

y, por lo tanto,

$$dx = [f(\theta)\cos\theta]' d\theta, \tag{20}$$

$$dy = [f(\theta)\operatorname{sen}\theta]' d\theta. \tag{21}$$

De acuerdo con (20) y (21), entonces la longitud de la curva es:

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \\ &= \int_a^b \sqrt{1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2}\,dx \\ &= \int_a^b \sqrt{1+\left[\frac{[f(\theta)\operatorname{sen}\theta]'}{[f(\theta)\cos\theta]'}\right]^2}\,[f(\theta)\cos\theta]'d\theta \\ &= \int_a^b \sqrt{\frac{([f(\theta)\cos\theta]')^2+([f(\theta)\operatorname{sen}\theta]')^2}{([f(\theta)\cos\theta]')^2}}\,[f(\theta)\cos\theta]'d\theta \\ &= \int_a^b \sqrt{([f(\theta)\cos\theta]')^2+([f(\theta)\operatorname{sen}\theta]')^2}\,d\theta. \end{aligned} \tag{22}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} [f(\theta)\cos\theta]' &= f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\operatorname{sen}\theta, \\ [f(\theta)\operatorname{sen}\theta]' &= f'(\theta)\operatorname{sen}\theta + f(\theta)\cos\theta. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} &([f(\theta)\cos\theta]')^2+([f(\theta)\operatorname{sen}\theta]')^2 \\ &\quad= [f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\operatorname{sen}\theta]^2 + [f'(\theta)\operatorname{sen}\theta + f(\theta)\cos\theta]^2 \\ &\quad= [f'(\theta)]^2\cos^2\theta - 2f'(\theta)f(\theta)\cos\theta\operatorname{sen}\theta + [f(\theta)]^2\operatorname{sen}^2\theta \\ &\qquad + [f'(\theta)]^2\operatorname{sen}^2\theta + 2f'(\theta)f(\theta)\cos\theta\operatorname{sen}\theta + [f(\theta)]^2\cos^2\theta \\ &\quad= ([f'(\theta)]^2+[f(\theta)]^2)(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta) \\ &\quad= [f'(\theta)]^2+[f(\theta)]^2. \end{aligned}$$

Sustituyendo esto en (22) se obtiene:

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(\theta)]^2+[f(\theta)]^2}\,d\theta.$$

La discusión anterior es un esquema de la prueba del siguiente teorema.

Teorema 1

Si C es una curva dada en coordenadas polares por $r = f(\theta)$, de manera que $f(\theta)$ y $f'(\theta)$ son continuas en un intervalo $[a, b]$, con $b \leq a + 2\pi$, entonces la longitud de C desde $\theta = a$ hasta $\theta = b$, viene dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(\theta)]^2+[f(\theta)]^2}\,d\theta. \tag{23}$$

Ejemplo 15

Determinar la longitud del segmento de la espiral $r = e^{-\theta}$, comprendido entre $\theta = 0$ y $\theta = \frac{3}{4}\pi$.

Solución:

La siguiente figura representa el segmento de curva mencionado.

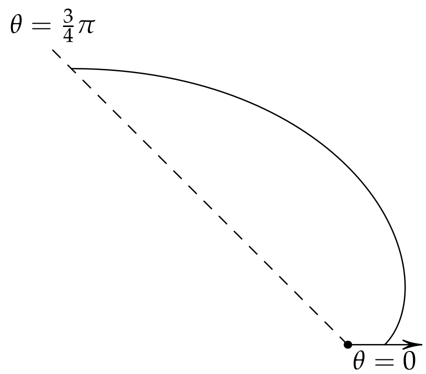


Figura 31. Segmento de la espiral $r = e^{-\theta}$, para $\theta \in [0, \frac{3}{4}\pi$.

En este caso $f(\theta) = e^{-\theta}$, entonces $f'(\theta) = -e^{-\theta}$; luego, la longitud de la curva es:

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2}\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{[e^{-\theta}]^2 + [-e^{-\theta}]^2}\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{2[e^{-\theta}]^2}\, d\theta \\
&= \sqrt{2} \int_0^{\frac{3}{4}\pi} e^{-\theta}\, d\theta \\
&= \sqrt{2} \left[-e^{-\theta}\right]_0^{3\pi/4} \\
&= \sqrt{2} \left[-e^{-3\pi/4} + 1\right] \\
&\approx 1,28017.
\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 16

Determinar la longitud del cardioide de ecuación $r = 3(1 - \cos\theta)$.

Solución:

El cardioide se representa en la siguiente figura 32. Observe que es simétrico con respecto al eje x, por lo que se puede determinar la longitud de la mitad superior y multiplicar por 2. La mitad superior es el arco de la curva limitado por $\theta = 0$ y $\theta = \pi$.

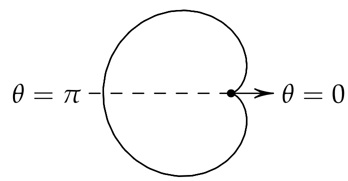


Figura 32. Cordioide de ecuación $r = 3(1 - \cos\theta)$.

Por otra parte, $f(\theta) = 3(1 - \cos\theta)$, por lo que $f'(\theta) = 3\,\mathrm{sen}\,\theta$. De esta manera, la longitud del cardioide completo es:

$$\begin{aligned}
L &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2}\, d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi} \sqrt{9\,\mathrm{sen}^2\theta + 9(1-\cos\theta)^2}\, d\theta \\
&= 6\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos\theta}\, d\theta \\
&= 6\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{2\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta \\
&= 12\int_0^{\pi} \mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\, d\theta \\
&= \left. -24\cos\frac{\theta}{2}\right|_0^{\pi} \\
&= 24.
\end{aligned}$$

□

Ejercicios de autoevaluación de las secciones 1, 2 y 3

De 1 a 4, escriba el punto en coordenadas polares:

1. $P(-1,0)$
2. $Q(-2\sqrt{3},2)$
3. $R(-3,3)$
4. $S(\sqrt{3},-3)$

En los ejercicios 5 a 10, escriba la ecuación en coordenadas rectangulares.

5. $r = 3\cos\theta$
6. $r = 25$
7. $r = 2\sec\theta$
8. $r = \frac{2}{1+3\,\mathrm{sen}\,\theta}$
9. $r\cos\theta = 3 - 2r\,\mathrm{sen}\,\theta$
10. $r^2 = \cos\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta$

En los ejercicios 11 a 18, identifique la curva dada (rosa con su número de pétalos, limaçon, cardioide, recta, lemniscata, circunferencia).

11. $r = 4\theta$
12. $r^2 = 16\,\mathrm{sen}\,2\theta$
13. $r = 1 - \cos\theta$
14. $\theta = \frac{\pi}{3}$
15. $r = 2\tan\frac{\pi}{5}$
16. $r = 5\cos 3\theta$
17. $r = 3\,\mathrm{sen}\,\theta$
18. $r = 2 - 5\,\mathrm{sen}\,\theta$

En los ejercicios 19 a 24, haga un bosquejo de la gráfica de la curva dada.

19. $r = 4\cos 2(\theta - \frac{\pi}{4})$
20. $r = 2 + \mathrm{sen}\,\theta$
21. $r = 2\cos 4\theta$
22. $r = -3\,\mathrm{sen}\,\theta$
23. $r = 2 - 2\cos\theta$
24. $r^2 = 4\,\mathrm{sen}\,2\theta$

En los ejercicios 25 a 30, identifique la cónica (elipse, parábola, hipérbola), determine su excentricidad y su recta directriz y haga un bosquejo de su gráfica.

25. $r = \dfrac{5}{1+\mathrm{sen}\,\theta}$
26. $r = \dfrac{3}{3-\mathrm{sen}\,\theta}$
27. $r = \dfrac{4}{1+2\,\mathrm{sen}\,\theta}$
28. $r = \dfrac{12}{3+2\cos\theta}$
29. $r = \dfrac{6}{2-3\cos\theta}$
30. $r = \dfrac{4}{2+\cos\theta}$

En los ejercicios 31 a 33, determine la pendiente de la recta tangente a la curva dada en el punto indicado.

31. $r = 1 + \cos\theta$ en $(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$
32. $r = \cos 5\theta$ en el polo
33. $r = \dfrac{1}{\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta}$ cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$

34. Determine los puntos del cardioide $r = 2 + 2\operatorname{sen}\theta$, en los que la recta tangente es horizontal y los puntos en los que es vertical.

En los ejercicios 35 a 39, determine los puntos de intersección de las curvas dadas.

35. $r^2 = 4\cos 2\theta$, $r = 2$
36. $r = \dfrac{4}{1-\cos\theta}$, $r = 2\cos\theta$
37. $r = 2\cos\theta$, $r = 2\operatorname{sen}\theta$
38. $r = 4(1+\cos\theta)$, $r = 4(1-\operatorname{sen}\theta)$
39. $r = 4\operatorname{sen}2\theta$, $r = 2\cos\theta$

40. Determine el área encerrada por todos los pétalos de la rosa $r = 2\operatorname{sen}4\theta$.

41. Calcule el área de la región que queda dentro de la circunferencia $r = 5$ y fuera del cardioide $r = 5(1-\cos\theta)$.

42. Determine el área encerrada por la lemniscata $r^2 = 4\cos 2\theta$.

43. Determine el área de la región que queda en el interior de la circunferencia $r = 6\cos\theta + 8\operatorname{sen}\theta$ y fuera de la lemniscata $r^2 = 16\operatorname{sen}2\theta$.

44. La curva dada por $r\theta = a$ se llama espiral hiperbólica. Determine el área de la región limitada por esta espiral y por las rectas $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$.

45. Determine el área de la región que queda dentro del limaçon $r = 2 - 4\operatorname{sen}\theta$, pero fuera de su lazo interior.

46. Calcule la longitud del cardioide $r = 4(1-\cos\theta)$.

47. Determine la longitud del arco de la curva $r = 3\operatorname{sen}\theta$, con $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.

4. Repaso de curvas en coordenadas paramétricas

Una curva se puede representar mediante una ecuación cartesiana, en coordenadas rectangulares, en la forma $y = f(x)$ (en caso de que corresponda a una función) o en la forma $F(x, y) = c$, donde F es una función de dos variables y c es una constante. Por ejemplo, la curva que corresponde a la circunferencia C de centro $(0, 0)$ y radio 1 se puede describir, en coordenadas rectangulares, mediante la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

También, según las secciones precedentes, se puede describir curvas en el plano mediante el uso de coordenadas polares en la forma $F(r, \theta) = c$. Por ejemplo, la circunferencia C, se describe en coordenadas polares con la ecuación $r = 1$.

Otra forma útil para escribir curvas planas es con el uso ecuaciones paramétricas. Imagine que un objeto se mueve sobre el plano de manera continua; si este objeto lleva adjunto un bolígrafo, al finalizar su recorrido habrá trazado en el plano algún tipo de curva C. Cada punto P en la curva tiene coordenadas rectangulares (x, y) y habrá sido trazado en algún instante t del recorrido. Esto es, P depende de t, por lo que cada una de las coordenadas x e y dependen de t, es decir, $x = f(t)$ e $y = g(t)$ para algunas funciones f y g. En este caso, se dice que la curva C está descrita en forma paramétrica, mediante el parámetro t, por

$$x = f(t), \quad y = g(t).$$

Desde luego, el parámetro para describir una curva no necesariamente representa el tiempo.

Ejemplo 17

Considérese la curva C descrita en forma paramétrica por

$$x = t^2 - 1, \quad y = t + 1, \quad \text{con } t \in [-2, 2]. \tag{24}$$

Se discutirá algunos aspectos de esta curva, con el propósito de comentar algunos hechos importantes relacionados con las curvas paramétricas.

Primero se elabora una tabla de valores. En la primera columna aparecen valores de t; comienza con $t = -2$ y termina con $t = 2$, de manera que se recorre el intervalo $[-2, 2]$ de menor a mayor. En la segunda columna, aparece el correspondiente valor de x; en la tercera, el correspondiente valor de y y, en la cuarta, el punto $P(x,y)$ que se produce.

t	$x = t^2 - 1$	$y = t + 1$	$P(x,y)$
-2	3	-1	$(3,-1)$
-1	0	0	$(0,0)$
0	-1	1	$(-1,1)$
1	0	2	$(0,2)$
2	3	3	$(3,3)$

Si se dibujan los puntos en el orden que se generan en la tabla, de arriba hacia abajo, se obtiene primero el que está abajo en la gráfica de la figura siguiente y, de último, el que se encuentra más arriba.

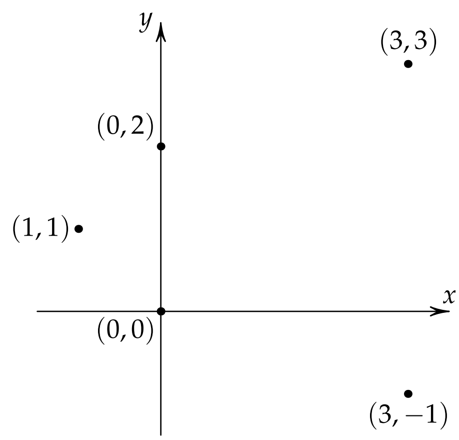


Figura 33. Algunos puntos en la curva C.

La disposición de los puntos en la figura 33 sugieren que están en una parábola. En efecto, si se elimina el parámetro en la la ecuación de la curva se tiene $t = y - 1$ (pues $y = t + 1$) y, entonces $x = (y-1)^2 - 1$. Es decir,

$$x = y^2 - 2y.$$

Esta es la ecuación de la parábola de la figura 34. Las flechas en la curva indican la dirección en la que se genera la gráfica cuando t recorre el intervalo desde -2 hasta 2.

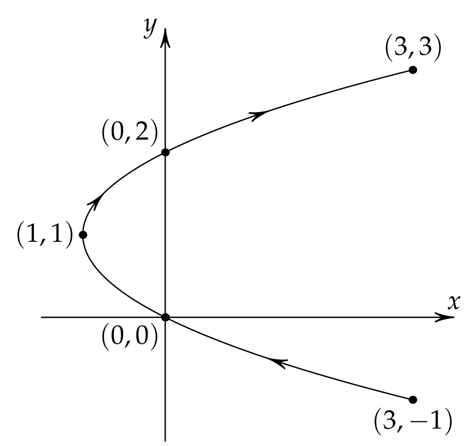


Figura 34. La curva C se recorre desde $(3,-1)$ hasta $(3,3)$.

Ahora considere:

$$x = t^2 - 1, \quad y = 1 - t, \quad \text{con } t \in [-2,2]. \tag{25}$$

Esta parametrización es diferente de la (24), puesto que t se define de manera diferente. Al hacer la tabla de valores, se obtiene:

t	$x = t^2 - 1$	$y = 1 - t$	$P(x, y)$
-2	3	3	$(3, 3)$
-1	0	2	$(0, 2)$
0	-1	1	$(-1, 1)$
1	0	0	$(0, 0)$
2	3	-1	$(3, -1)$

Con la parametrización (24) se obtienen los mismos puntos pero en orden inverso. Por otra parte, al eliminar el parámetro, se logra la misma ecuación de antes: $x = y^2 - 2y$. Las flechas en la gráfica de la figura 35 indican la dirección en que la curva se produce cuando se utiliza la parametrización (25).

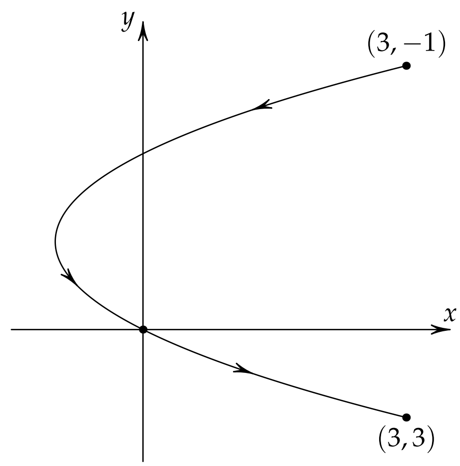


Figura 35. La curva C se recorre desde $(3, 3)$ hasta $(3, -1)$.

En conclusión, ambas parametrizaciones corresponden a la misma curva, pero se obtienen en sentidos opuestos. Si la curva es trazada por un punto móvil, en el primer caso, este parte del punto $(3, 3)$ y concluye en el punto $(3, -1)$, mientras que en el segundo caso, empieza en $(3, -1)$ y concluye en $(3, 3)$.

En general, una curva tiene infinitas parametrizaciones; ellas recorren la curva en una dirección u otra, a diferentes velocidades e, incluso, pueden recorrerla dos o más veces.

Si una curva corresponde a la gráfica de una función $y = f(x)$, entonces tiene una forma paramétrica, aunque no la única, evidente:

$$x = t, \quad y = f(t).$$

Las curvas que no corresponden a funciones pueden tener ecuaciones cartesianas sencillas y ecuaciones paramétricas muy complejas o viceversa, ecuaciones paramétricas simples y ecuaciones cartesianas muy complicadas. Se trabaja con una u otra dependiendo de las circunstancias.

Ejemplo 18

Al comienzo de esta sección se dijo que la ecuación cartesiana de una circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio a es:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Una forma de describir esta circunferencia con el uso de ecuaciones paramétricas es mediante

$$x = a\cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad \text{con } t \in [0, 2\pi]. \tag{26}$$

Efectivamente, según (26):

$$x^2 + y^2 = a^2\cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t = a^2(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = a^2.$$

Además, cuando $t = 0$, se obtiene el punto $(1,0)$ y cuando $t = 2\pi$, también se obtiene $(1,0)$; por lo tanto se recorre la circunferencia, desde $(1,0)$ hasta el mismo punto, siguiendo el movimiento contrario a las manecillas del reloj. En este caso, ambos tipos de ecuaciones son bastante sencillos. □

Ejemplo 19

Las ecuaciones

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad \text{con } t \in \mathbb{R},$$

donde a es un número real positivo fijo corresponde a una curva llamada **cicloide**.

En la figura 36, se muestra la gráfica de una cicloide, para $t \in [-4\pi, 4\pi]$.

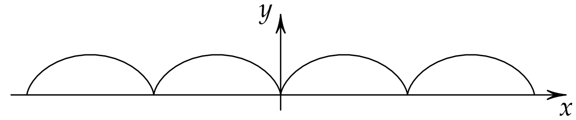


Figura 36. Parte de una cicloide, con $t \in [-4\pi, 4\pi]$.

Como se puede ver, es una curva periódica; los arcos se repiten indefinidamente hacia la izquierda y hacia la derecha. □

5. Longitud de arco de curvas paramétricas

Se mencionó, en la página 24, que la longitud de arco de una curva descrita por $y = f(x)$ desde el punto $(a, f(a))$ hasta el punto $(b, f(b))$, es:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}\, dx. \tag{27}$$

Considere que una curva C está parametrizada por $x = f(t)$, $y = f(t)$, donde $f(t)$ y $g(t)$ son continuas, derivables, con derivadas continuas y no simultáneamente iguales a 0 en ningún punto del intervalo $]a, b[$. Suponga también que la curva se recorre exactamente una vez cuando t aumenta desde a hasta b. Se tiene que $dx = f'(t)dt$, $dy = g'(t)dt$ y, siguiendo lo indicado en (27), se define la longitud de arco de C, desde $t = a$, hasta $t = b$ como

$$L = \int_a^b \sqrt{\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}\right]^2}\, dt. \tag{28}$$

O, de modo equivalente:

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt. \tag{29}$$

Ejemplo 20

Determinar la longitud de un arco completo de la cicloide

$$x = 3(t - \operatorname{sen} t), \quad y = 3(1 - \cos t).$$

Solución:

La parametrización

$$x = 3(t - \operatorname{sen} t), \quad y = 3(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

determina un arco completo de la cicloide. Se tiene que $\frac{dx}{dt} = 3(1 - \cos t)$, $\frac{dy}{dt} = 3 \operatorname{sen} t$;

entonces, su longitud viene dada por

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(3(1-\cos t))^2 + (3\,\mathrm{sen}\, t)^2}\, dt \\
&= 3\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \mathrm{sen}^2\, t}\, dt \\
&= 3\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\, dt \\
&= 3\int_0^{2\pi} \sqrt{2\cdot 2\,\mathrm{sen}^2 \frac{t}{2}}\, dt \\
&= 6\int_0^{2\pi} \left|\mathrm{sen}\, \frac{t}{2}\right|\, dt \\
&= 6\left(\int_0^{\pi} \mathrm{sen}\, \frac{t}{2}\, dt - \int_{\pi}^{2\pi} \mathrm{sen}\, \frac{t}{2}\, dt\right) \\
&= 12\left(-\cos \frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} + \cos \frac{t}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) \\
&= 12(1+1) = 24.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 21

La figura 37 proporciona una curva que recibe el nombre de **hipocicloide de tres ramas**, su forma paramétrica es:

$$x = a(2\cos t + \cos 2t), \quad y = a(2\,\mathrm{sen}\, t - \mathrm{sen}\, 2t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

donde a es un número real positivo fijo. Determinar su longitud.

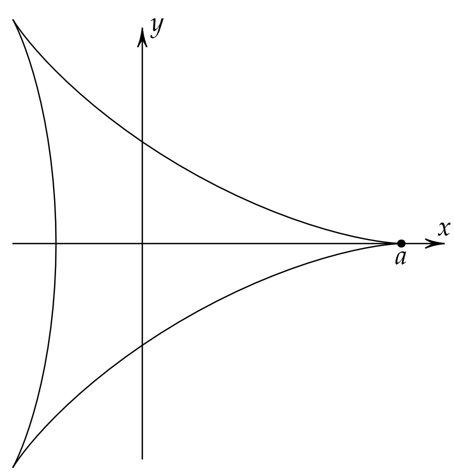


Figura 37. Hipocicloide de tres ramas.

Solución:

La curva consta de tres ramas de la misma longitud, de manera que se calcula la longitud de una rama y se multiplica por tres. La rama superior se obtiene cuando el parámetro t recorre la tercera parte de su dominio, es decir, cuando $t \in [0, \frac{2}{3}\pi]$.

Por otra parte, $\frac{dx}{dt} = -2a(\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t)$, $\frac{dy}{dt} = 2a(\cos t - \cos 2t)$; por lo tanto, la longitud de la hipocicloide es:

$$
\begin{aligned}
L &= 3\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{4a^2(\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t)^2 + 4a^2(\cos t - \cos 2t)^2}\, dt \\
&= 6a \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + 2\operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t + \operatorname{sen}^2 2t + \cos^2 t - 2\cos t \cos 2t + \cos^2 2t}\, dt \\
&= 6a \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{2 - 2(\cos t \cos 2t - \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t)}\, dt \\
&= 6a \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{2(1 - \cos 3t)}\, dt \\
&= 6a \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{4\operatorname{sen}^2 \frac{3}{2}t)}\, dt \\
&= 12a \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \operatorname{sen} \frac{3}{2}t\, dt \\
&= 12a \left(-\frac{2}{3}\cos\frac{3}{2}t\right)\Bigg|_0^{\frac{2}{3}\pi} \\
&= -8a(\cos \pi - \cos 0) \\
&= 16a.
\end{aligned}
$$

□

6. Área de una región plana limitada por curvas dadas en forma paramétrica

Recuerde que el área de una región limitada por $y = f(x)$, desde $x = a$ hasta $x = b$ está dada por

$$A = \int_a^b f(x)dx,$$

o, de modo equivalente,

$$A = \int_a^b y\, dx. \tag{30}$$

Sea C una curva que está dada paramétricamente por

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad \text{con } t \in [\alpha, \beta],$$

de manera que en ese intervalo la curva no se corta a sí misma y se recorre exactamente una vez. Se tiene que $dx = f'(t)dt$ y, si $a = f(\alpha)$ y $b = f(\beta)$, entonces, haciendo un cambio de variable en (30), se puede calcular el área limitada por C, mediante

$$A = \left| \int_{\alpha}^{\beta} g(t) f'(t)\, dt \right|. \tag{31}$$

Ejemplo 22

Determinar el área de la región encerrada por una hipocicloide de ecuaciones paramétricas: $x = 2(2\cos t + \cos 2t), \quad y = 2(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t), \quad t \in [0, 2\pi]$.

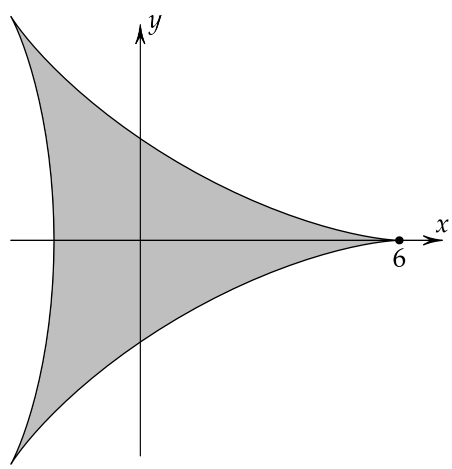


Figura 38. Región limitada por una hipocicloide.

Solución:

En este caso, $dx = -4(\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t)dt$, entonces, de acuerdo con (31), el área de la región es:

$$\begin{aligned}
A &= \left| \int_0^{2\pi} 2(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t) \cdot -4(\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t)\, dt \right| \\
&= \left| -8 \int_0^{2\pi} (-2\operatorname{sen}^2 t - \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t + \operatorname{sen}^2 2t)\, dt \right| \\
&= \left| -8 \int_0^{2\pi} \left(\cos 2t - 1 - 2\operatorname{sen}^2 t \cos t + \frac{1 - \cos 4t}{2} \right) dt \right| \\
&= \left| -8 \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 t - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4t - \frac{1}{2}t \right) \Big|_0^{2\pi} \right| = \left| -8 \cdot -\frac{1}{2} \cdot 2\pi \right| = 8\pi. \qquad \square
\end{aligned}$$

Ejemplo 23

La elipse de la figura 39 tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

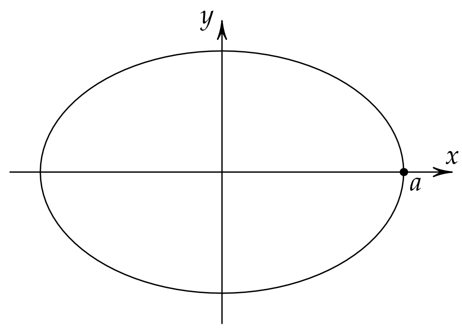


Figura 39. Elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Si se hace $x = a\cos t$, $y = b\,\mathrm{sen}\,t$, entonces

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(a\cos t)^2}{a^2} + \frac{(b\,\mathrm{sen}\,t)^2}{b^2} = \cos^2 t + \mathrm{sen}^2\,t = 1.$$

Por otra parte, si $t = a$, entonces $x = a\cos 0 = a$ y $y = \mathrm{sen}\,0 = a$ y se obtiene el punto $(a, 0)$. De mismo modo, se obtiene el punto $(a, 0)$ cuando $t = 2\pi$. Es decir, una parametrización de la elipse es:

$$x = a\cos t, y = b\,\mathrm{sen}\,t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Por lo tanto, puesto que $dx = -a\,\mathrm{sen}\,t$, el área de la región es:

$$\begin{aligned}
A &= \left| \int_0^{2\pi} b\,\mathrm{sen}\,t \cdot -a\,\mathrm{sen}\,t\,dt \right| \\
&= \left| -ab \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2\,t, dt \right| \\
&= \left| -ab \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2}, dt \right| \\
&= \left| -\frac{ab}{2} \left(t - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2t \right) \Big|_0^{2\pi} \right| \\
&= \left| -\frac{ab}{2} \cdot 2\pi \right| \\
&= ab\pi.
\end{aligned}$$

Ejemplo 24

En la figura 40, se muestra una circunferencia y una curva de nombre **astroide**.

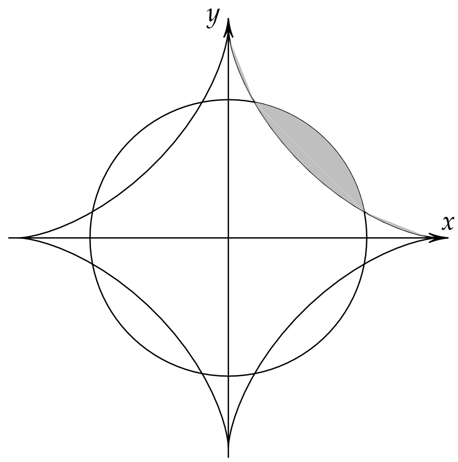


Figura 40. Circunferencia y astroide.

Las ecuaciones paramétricas de la circunferencia C_1 y el astroide C_2 son:

$$C_1: \quad x = \sqrt{7}\cos t, \quad y = \sqrt{7}\operatorname{sen} t, \quad t \in [0, 2\pi], \tag{32}$$

$$C_2: \quad x = 4\cos^3 t, \quad y = 4\operatorname{sen}^3 t, \quad t \in [0, 2\pi]. \tag{33}$$

Determinar el área de la región sombreada en la figura 40.

Solución:

Vea, en la gráfica de la figura 41, el sector que interesa. Los punto A y B corresponden a la intersección entre las curvas. Para determinar el área, se debe buscar para qué valores de t se obtienen dichos puntos.

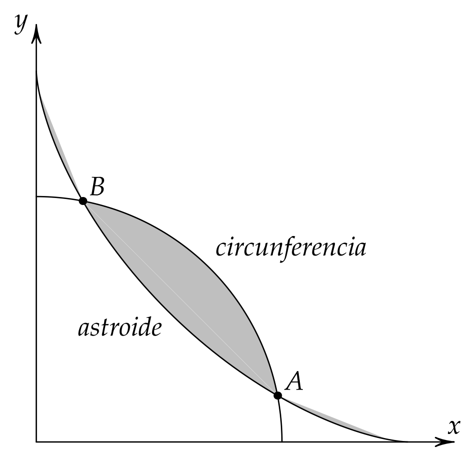


Figura 41. Región determinada por la circunferencia y la astroide.

De (32), la ecuación escalar de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 = 7.$$

Sustituyendo x e y dados por (33) en esta ecuación, se obtiene:

$$16\cos^6 t + 16\operatorname{sen}^6 t = 7$$

$$\Rightarrow \quad \cos^6 t + \operatorname{sen}^6 t = \frac{7}{16}. \tag{34}$$

Pero:

$$\begin{aligned} 1 = 1^3 &= (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)^3 \\ &= \cos^6 t + \operatorname{sen}^6 t + 3\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) \\ &= \cos^6 t + \operatorname{sen}^6 t + 3(\cos t \operatorname{sen} t)^2 \end{aligned}$$

Es decir,

$$\cos^6 t + \operatorname{sen}^6 t = 1 - 3(\cos t \operatorname{sen} t)^2 = 1 - \frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 t.$$

Sustituyendo esto en (34), se deduce lo siguiente:

$$1 - \frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 t = \frac{7}{16} \quad \Rightarrow \quad |\operatorname{sen} 2t| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

De modo que el punto A de la astroide se obtiene cuando $t = \frac{\pi}{6}$ y el punto B, que es simétrico con A respecto a la recta $y = x$, se obtiene cuando $t = \frac{\pi}{3}$. Por lo tanto, $A = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3})$ y $B = (\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$.

Para ver con cuál valor de t se obtiene el punto A en la circunferencia, se hace $x = \frac{1}{2} = \sqrt{t}\cos t$ y, entonces, $t = \cos^1 \frac{1}{2\sqrt{7}} \approx 1,38$.

En cuanto al punto B: $x = \frac{3}{2}\sqrt{3} = \sqrt{7}\cos t$ y, entonces, $t = \cos^{-1}\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \approx 0,19$.

El área limitada por la circunferencia cuando $t \in [0,19,\ 1,38]$ es:

$$\begin{aligned} A_1 &= \left| \int_{0,19}^{1,38} \sqrt{7}\operatorname{sen} t \cdot -\sqrt{7}\operatorname{sen} t\, dt \right| \\ &= 7 \left| \int_{0,19}^{1,38} \operatorname{sen}^2 t\, dt \right| = \frac{7}{2}\left| \int_{0,19}^{1,38} (1 - \cos 2t)\, dt \right| \\ &= \frac{7}{2}\left| \left(t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t \right)\Bigg|_{0,19}^{1,38} \right| \\ &= \frac{7}{2}\left(1,38 - 0,19 - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2,76 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 0,38 \right) = 4,165. \end{aligned}$$

El área limitada por la astroide cuando $t \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ es

$$\begin{aligned} A_2 &= \left| \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 4\operatorname{sen}^3 t \cdot -12\cos^2 t \operatorname{sen} t\, dt \right| \\ &= 2,85. \end{aligned}$$

El cálculo de esta integral se deja como ejercicio para el lector.

En conclusión, el área buscada es $A_1 - A_2 = 4,165 - 2,85 = 1,325$. $\square$

Ejercicios de autoevaluación de las secciones 4, 5 y 6

En los ejercicios 1 a 4 elimine el parámetro para determinar la ecuación cartesiana de la curva dada en forma paramétrica.

1. $x = t - 2, y = t^2 - 3$
2. $x = 2\cos t, y = 2\operatorname{sen} t$
3. $x = 4\cos t, y = 6\operatorname{sen} t$
4. $x = t^3 - 1, y = t^2 - 1$
5. Calcule la longitud de la astroide $x = 4\cos^3 t$, $y = 4\operatorname{sen}^3 t$ (con $t \in [0, 2\pi]$).
6. Determine el área encerrada por la astroide dada en el ejercicio anterior.
7. Determine el área de la región limitada por un arco de la cicloide $x = 4(t - \operatorname{sen} t)$, $y = 4(1 - \cos t)$ y el eje x.
8. La curva determinada por $x = 4t - 2\operatorname{sen} t$, $y = 4 - 2\cos t$ se llama trocoide (vea la figura 42). Calcule el área bajo uno de los arcos de la trocoide ($t \in [0, 2\pi]$).

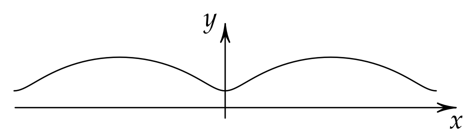


Figura 42. Trocoide.

9. Una curva C se define mediante $x = t^3 - 1$, $y = t^2 + 1$, con $t \in [-2, 2]$. Dibuje la curva, determine su longitud y el área bajo ella.
10. Calcule el área bajo la curva $x = \tan\theta$, $y = \sec^2\theta$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{6}]$.
11. Determine la longitud de la curva dada por $x = 4t^2$, $y = 2t^3$, $t \in [0, 2]$.
12. En la figura 43, se proporcionan una hipocicloide de ecuación $x = 8\cos t + 4\cos 2t$, $y = 8\operatorname{sen} t - 4\operatorname{sen} 2t$ y una circunferencia de ecuación $x = 6\cos t$, $y = 6\operatorname{sen} t$. Determine el área de la región sombreada.

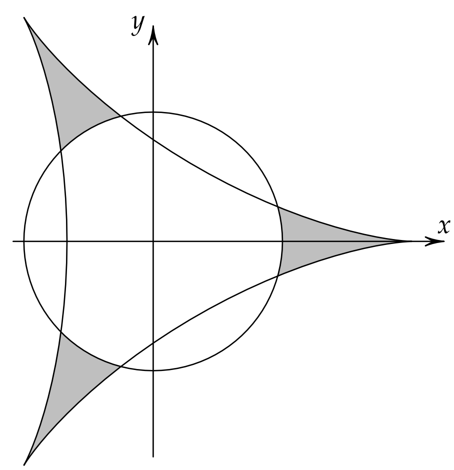


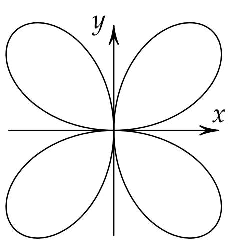
Figura 43. Región limitada por una circunferencia y una hipocicloide.

Soluciones a los ejercicios

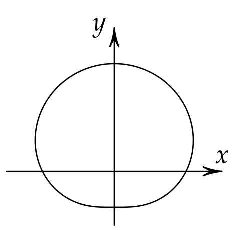
Ejercicios de autoevaluación de las secciones 1, 2 y 3, página 28

1. $P(1, \pi)$
2. $P(4, \frac{5}{6}\pi)$
3. $P(3\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi)$
4. $P(2\sqrt{3}, \frac{5}{3}\pi)$
5. $r = 3\cos\theta \Rightarrow r^2 = 3r\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 3x.$
6. $r = 25 \Rightarrow r^2 = 625 \Rightarrow x^2 + y^2 = 625.$
7. $r = 2\sec\theta \Rightarrow r\cos\theta = 2 \Rightarrow r = 2.$
8. $r = \dfrac{2}{1 + 3\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow r + 3r\operatorname{sen}\theta = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + 3y = 2.$
9. $r\cos\theta = 3 - 2r\operatorname{sen}\theta \Rightarrow x + 2y = 3.$
10. $r^2 = \cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta \Rightarrow r^3 = r\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta \Rightarrow (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = x + 2y.$
11. Espiral.
12. Lemniscata.
13. Cardioide.
14. Recta.
15. Circunferencia.
16. Rosa de tres pétalos.
17. Circunferencia.
18. Limaçon con un lazo interior.

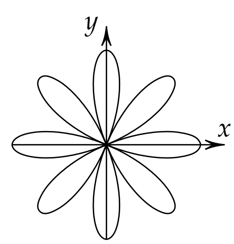
19.



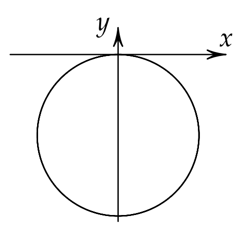
20.



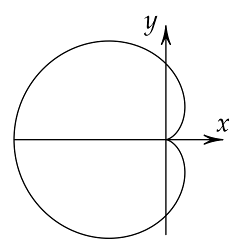
21.



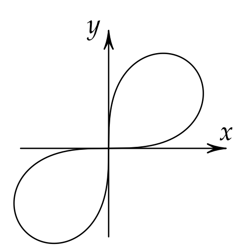
22.



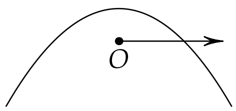
23.



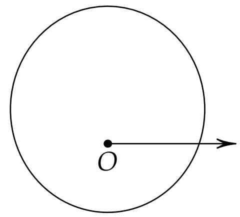
24.



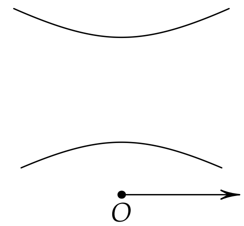
25. Parábola,
directriz $y = 5$, $\varepsilon = 1$.



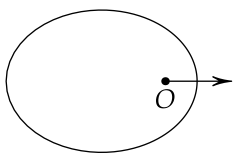
26. Elipse,
directriz $y = -1$,
$\varepsilon = 1$.



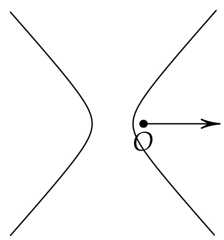
27. Hipérbola,
directriz $y = 2$, $\varepsilon = 2$.



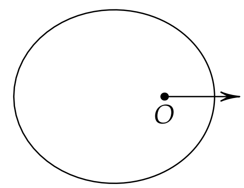
28. Elipse,
directriz $x = 6$, $\varepsilon = \frac{2}{3}$.



29. Hipérbola,
directriz $x = -2$,
$\varepsilon = \frac{3}{2}$.



30. Elipse,
directriz $x = 4$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$.



31. Se tiene $x = (1+\cos\theta)\cos\theta$, $y = (1+\cos\theta)\operatorname{sen}\theta$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{d\theta} &= -\operatorname{sen}^2\theta + (1+\cos\theta)\cos\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta + \cos\theta \\
\frac{dx}{d\theta} &= -\operatorname{sen}\theta\cos\theta - (1+\cos\theta)\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}\theta(1+2\cos\theta)
\end{aligned}$$

Luego:

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\frac{\pi}{6}} = \left.\frac{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta + \cos\theta}{-\operatorname{sen}\theta(1+2\cos\theta)}\right|_{\frac{\pi}{6}} = -\frac{5+2\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})}.$$

32. En el polo se cumple que $r = 0$, luego $\cos 5\theta = 0$ y, por lo tanto, $5\theta = \frac{\pi}{2}$. De aquí, en el polo, $\theta = \frac{\pi}{10}$.

Por otra parte, $x = \cos 5\theta \cdot \cos\theta$, $y = \cos 5\theta \cdot \operatorname{sen}\theta$, por lo que:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{d\theta} &= -5\operatorname{sen} 5\theta \cdot \operatorname{sen}\theta + \cos 5\theta \cdot \cos\theta \\
\frac{dx}{d\theta} &= -5\operatorname{sen} 5\theta \cdot \cos\theta - \cos 5\theta \cdot \operatorname{sen}\theta
\end{aligned}$$

Luego:

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\frac{\pi}{10}} = \left.\frac{-5\operatorname{sen} 5\theta \cdot \operatorname{sen}\theta + \cos 5\theta \cdot \cos\theta}{-5\operatorname{sen} 5\theta \cdot \cos\theta - \cos 5\theta \cdot \operatorname{sen}\theta}\right|_{\frac{\pi}{10}} = \tan\frac{\pi}{10}.$$

33. Aquí, $x = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$, $y = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$. Entonces:

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{\cos\theta(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) - \operatorname{sen}\theta(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)}{(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2} = \frac{1}{(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2}$$
$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{-\operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) - \cos\theta(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)}{(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2} = \frac{-1}{(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2}$$

Luego:

$$\frac{dy}{dx} = -1.$$

Es decir, la pendiente de la tangente en todos los puntos es $m = -1$; de hecho, la ecuación dada corresponde a una recta de pendiente -1.

34. Se tiene $x = 2(1 + \operatorname{sen}\theta)\cos\theta$, $y = 2(1 + \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta$; luego:

$$\frac{dy}{d\theta} = 2[\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta(1\operatorname{sen}\theta)] = 2\cos\theta(1 + 2\operatorname{sen}\theta)$$
$$\frac{dx}{d\theta} = 2[\cos^{\theta} - \operatorname{sen}\theta(1\operatorname{sen}\theta)] = 2[-2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta + 1]$$

Se tiene tangente horizontal cuando $\frac{dy}{d\theta} = 0$, es decir, $2\cos\theta(1 + 2\operatorname{sen}\theta) = 0$. De aquí se tiene:

- $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 4$.
- $1 + \operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{7}{6}\pi$ o $\theta = \frac{11}{6}\pi$. En ambos casos, $r = 1$.

Luego, hay tres puntos donde la tangente es horizontal: $(4, \frac{\pi}{2})$, $(1, \frac{7}{6}\pi)$ y $(1, \frac{11}{6}\pi)$.

La tangente es vertical cuando $\frac{dx}{d\theta} = 0$, es decir, $-2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta + 1 = 0 \Rightarrow$
$-(2\operatorname{sen}\theta - 1)(\operatorname{sen}\theta + 1) = 0$. De aquí se tiene:

- $\operatorname{sen}\theta = -1 \Rightarrow \theta = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow r = 0$.
- $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ o $\theta = \frac{5}{6}\pi$. En ambos casos, $r = 3$.

Luego, hay tres puntos donde la tangente es vertical: el polo, $(3, \frac{1}{6}\pi)$ y $(3, \frac{5}{6}\pi)$.

35. Los puntos de intersección se obtienen cuando $4 = 4\cos\theta$, es decir, $2\theta = 0$ o $2\theta = 2\pi$. De aquí $\theta = 0$ o $\theta = \pi$; en ambos casos $r = 2$. Los puntos de intersección son $(2, 0)$ y $(2, \pi)$ (vea la figura 44).

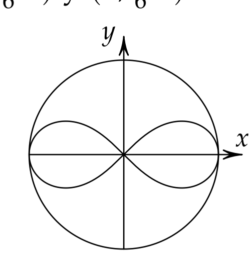


Figura 44.

36. Los puntos de intersección se obtienen cuando

$$\frac{4}{1-\cos\theta} = 2\cos\theta,$$

es decir:

$$4 = 2\cos\theta - 2\cos^2\theta$$
$$0 = 2\cos^2\theta - 2\cos\theta + 4$$

La ecuación cuadrática tiene discriminante negativo, por lo tanto no hay punto de intersección (vea la figura 45).

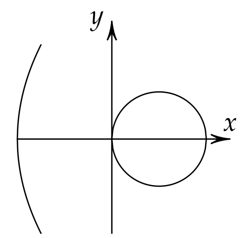


Figura 45.

37. Los puntos de intersección se obtienen cuando θ cumple que $2\cos\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$, es decir, $\cos\theta = \mathrm{sen}\,\theta$ y, por lo tanto, $\theta = \frac{1}{4}\pi$ o $\theta = \frac{5}{4}\pi$. Si $\theta = \frac{1}{4}\pi$, entonces $r = \sqrt{2}$ y si $\theta = \frac{5}{4}\pi$, entonces $r = -\sqrt{2}$, por los que ambos valores de θ generan el mismo punto: $(\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$.
Además en la primera ecuación, si $\theta = \frac{\pi}{2}$, entonces $r = 0$ y, en la segunda, si $\theta = 0$, entonces $r = 0$; esto dice que el polo pertenece a ambas curvas. Los puntos de intersección son: el polo y $(\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$ (vea la figura 46).

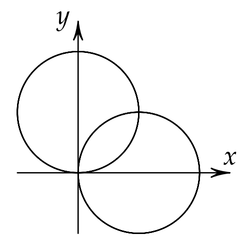


Figura 46.

38. Los puntos de intersección se obtienen cuando θ satisface $1+\cos\theta = 1-\mathrm{sen}\,\theta$, es decir, $\cos\theta = -\,\mathrm{sen}\,\theta$ y, por lo tanto, $\theta = \frac{3}{4}\pi$ o $\theta = \frac{7}{4}\pi$. Si $\theta = \frac{3}{4}\pi$, entonces $r = 2(2-\sqrt{2})$ y si $\theta = \frac{7}{4}\pi$, entonces $r = 2(2+\sqrt{2})$.
Además, en la primera ecuación, si $\theta = \pi$ entonces $r = 0$ y, en la segunda, si $\theta = \frac{\pi}{2}$, entonces $r = 0$; esto dice que el polo pertenece a ambas curvas. Los puntos de intersección son: el polo, $(2(2-\sqrt{2}), \frac{3}{4}\pi)$ y $(2(2+\sqrt{2}), \frac{7}{4}\pi)$ (vea la figura 47).

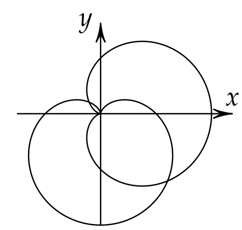


Figura 47.

39. Los puntos de intersección se obtienen cuando θ satisface $4\,\mathrm{sen}\,2\theta = 2\cos\theta$, es decir:

$$2\,\mathrm{sen}\,2\theta = \cos\theta$$
$$4\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = \cos\theta$$
$$\cos\theta(4\,\mathrm{sen}\,\theta - 1) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\cos\theta = 0, \quad \cos\theta = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow$$
$$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \mathrm{sen}^{-1}\frac{1}{4},\ \frac{\pi}{2} + \mathrm{sen}^{-1}\frac{1}{4}$$

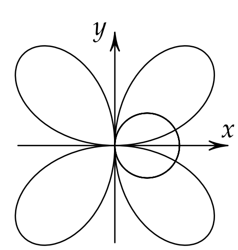


Figura 48.

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ o $\theta = \frac{3}{2}\pi$, entonces $r = 0$. Si $\theta = \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{4}$, entonces $r = \frac{1}{2}\sqrt{15}$ y si $\theta = \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{4}$, entonces $r = -\frac{1}{2}\sqrt{15}$. Esto produce tres puntos de intersección: el polo, $(\frac{1}{2}\sqrt{15}, \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{4})$ y $(-\frac{1}{2}\sqrt{15}, \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{4})$ (vea la figura 48).

40. La rosa tiene ocho pétalos. El primer pétalo sobre el eje x en el primer cuadrante (vea la figura 49) está limitado por las rectas $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{4}$, por lo que el área encerrada por la rosa es:

$$A = 8 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\operatorname{sen} 4\theta)^2 d\theta = 16\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2 4\theta d\theta$$
$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 8\theta) d\theta = 8\left[\theta - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 8\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi.$$

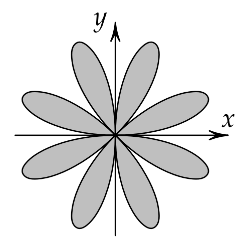


Figura 49.

41. El área buscada es el área interior al semicírculo derecho y exterior al cardioide (vea la figura 50). El radio del círculo es 5, por lo que el área del semicírculo es $A_1 = \frac{25}{2}\pi$. La región limitada por la parte del cardioide que queda a la derecha del eje y y el eje y es simétrica; la parte superior de esa parte del cardioide corresponde a $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, de modo que el área de esa región es:

$$A_2 = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 25(1 - \cos\theta)^2 d\theta$$
$$= 25\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta$$
$$= 25\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos\theta + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2\theta) d\theta$$
$$= 25\left[\tfrac{3}{2}\theta - 2\operatorname{sen}\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 25(\tfrac{3}{4}\pi - 2).$$

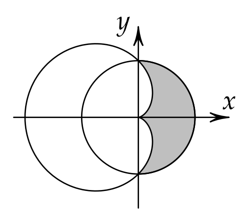


Figura 50.

En conclusión, el área buscada es:
$A = A_1 - A_2 = \frac{25}{2}\pi - 25(\frac{3}{4}\pi - 2) = 50 - \frac{25}{4}\pi.$

42. El área buscada es cuatro veces el área limitada por la parte de la lemniscata que queda en el I cuadrante y el eje x, que corresponde a $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ (vea la figura 51). Así, el área es:

$$A = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\cos 2\theta d\theta = 8\left[\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 4.$$

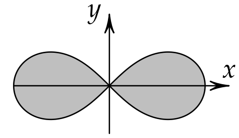


Figura 51.

43. La primera ecuación corresponde a un círculo de radio 5; su área es $A_1 = 25\pi$. El área que se busca es la del círculo menos la del lazo de la lemniscata que está en el I cuadrante (vea la figura 52). El área encerrada por ese lazo es:

$$A_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 16 \operatorname{sen} 2\theta d\theta = -4\cos 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8.$$

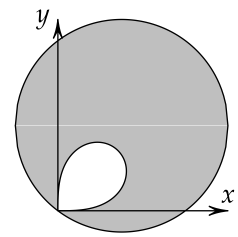


Figura 52.

Así, el área es $A = A_1 - A_2 = 25\pi - 8$.

44. El área buscada es:

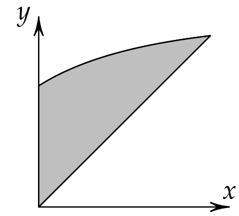


Figura 53.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{\theta^2} d\theta = -\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{\theta}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}a^2\left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\right) = \frac{a^2}{\pi}. \end{aligned}$$

45. El área buscada es $\overline{A} = A_1 - A_2$, donde A_1 es el área del limaçon completo y A_2 es el área del lazo interior del limaçon. La curva pasa por el polo cuando $\theta = \frac{\pi}{6}$, el punto señalado con A en la figura 54 corresponde a $(-2, \frac{\pi}{2})$; por lo tanto,

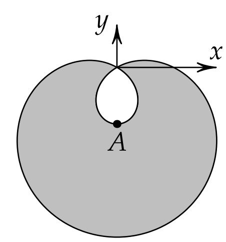


Figura 54.

$$\begin{aligned} A_2 &= 2\cdot\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2 - 4\operatorname{sen}\theta)^2 d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (4 - 16\operatorname{sen}\theta + 16\operatorname{sen}^2\theta) d\theta \\ &= 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (3 - 4\operatorname{sen}\theta - 2\cos 2\theta) d\theta \\ &= 4\left[3\theta + 4\cos\theta - \operatorname{sen} 2\theta\right]_{\pi/6}^{\pi/2} \\ &= 4(\pi - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

El punto inferior del cardioide corresponde a $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Así, para calcular A_1, el integrando es el mismo que antes solo que los límites de integración son $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{6}$. Así,

$$\begin{aligned} A_1 &= 4\left[3\theta + 4\cos\theta - \operatorname{sen} 2\theta\right]_{-\pi/6}^{\pi/6} \\ &= 4(2\pi + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

El área buscada es $\overline{A} = 4(2\pi + \sqrt{3}) - 4(\pi - \sqrt{3}) = 4(\pi + 2\sqrt{3})$.

46. En este caso, $f(\theta) = 4(1-\cos\theta)$, por lo tanto, $f'(\theta) = 4\operatorname{sen}\theta$. La mitad superior del cardioide se obtiene cuando θ varía en $[0,\pi]$ (vea la figura 55). Luego:

$$\begin{aligned} L &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{(4\operatorname{sen}\theta)^2 + 16(1-\cos\theta)^2}\, d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{16\operatorname{sen}^2\theta + 16(1-2\cos\theta+\cos^2\theta\, d\theta} \\ &= 8\int_0^{\pi} \sqrt{2-2\cos\theta}\, d\theta = 8\int_0^{\pi} \sqrt{4\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\theta}\, d\theta \\ &= 16\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\theta\, d\theta = 16\cdot -2\cos\tfrac{1}{2}\theta\Big|_0^{\pi} = 32. \end{aligned}$$

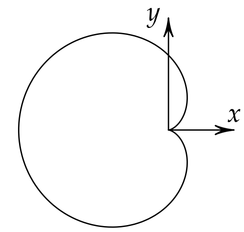


Figura 55.

47. Aquí, $f(\theta) = 3\operatorname{sen}\theta$, entonces, $f'(\theta) = 3\cos\theta$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} L &= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{(3\cos\theta)^2 + (3\operatorname{sen}\theta)^2}\, d\theta \\ &= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{9(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}\, d\theta \\ &= 3\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} d\theta = 3\theta\Big|_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} = \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

Ejercicios de autoevaluación de las secciones 4, 5 y 6, página 41

1. $x = t-2 \Rightarrow t = x+2$. Sustituyendo en $y = t^2-3$, se tiene, $y = (x+2)^2 - 3 \Rightarrow y = x^2+4x+1$.

2. $x = 2\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t \Rightarrow x^2 = 4\cos^2 t$, $y^2 = 4\operatorname{sen}^2 t \Rightarrow x^2+y^2 = 4$.

3. $x = 4\cos t$, $y = 6\operatorname{sen} t \Rightarrow x^2 = 16\cos^2 t$ (*), $y^2 = 36\operatorname{sen}^2 t$ (**).

   De (*), $\cos^2 t = \frac{1}{16}x^2$ (***); de (**), $y^2 = 36(1-\cos^2 t)$; luego, sustituyendo (***), $y^2 = 36(1-\frac{1}{16}x^2)$.

4. $x = t^3 - 1 \Rightarrow t = \sqrt[3]{x+1}$; sustituyendo esto en $y = t^2-1$, $y = (x+1)^{\frac{2}{3}} - 1$.

5. Las cuatro ramas de la astroide tienen la misma longitud. Aquí, $f(t) = 4\cos^3 t$, $g(t) = 4\operatorname{sen}^3 t$; por lo tanto, $f'(t) = -12\cos^2 t \operatorname{sen} t$, $g'(t) = 12\operatorname{sen}^2 t \cos t$. La mitad superior del cardioide se obtiene cuando θ varía en $[0, \pi]$ (vea la figura 56). Luego:

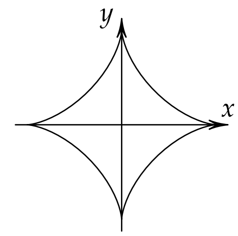


Figura 56.

$$\begin{aligned}[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 &= 144\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t + 144\operatorname{sen}^4 t \cos^2 t \\ &= 144\operatorname{sen}^2 t \cos^2 t.\end{aligned}$$

La longitud del astroide es:

$$L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{144\operatorname{sen}^2 t \cos^2 t}\, dt = 48\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t \cos t\, dt = 24\operatorname{sen}^2 t\Big|_0^{\pi/2} = 24.$$

6. En este caso, $f'(t) = -12\cos^2 t \operatorname{sen} t$; luego,

$$\begin{aligned}A &= 4\cdot 48\left|\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \operatorname{sen}^4 t\, dt\right| = 192\left|\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)^2 \cdot \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\, dt\right| \\ &= 24\left|\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2 2t - \operatorname{sen}^2 2t \cos 2t)\, dt\right| \\ &= 24\left|\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-\cos 4t) - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2t \cos 2t)\, dt\right| \\ &= 24\left|\frac{1}{8}(4t - \operatorname{sen} 4t) - \frac{1}{6}\operatorname{sen}^3 2t\right|_0^{\pi/2} = 6\pi.\end{aligned}$$

7. Si $t = 0$, entonces $x = 0$, $y = 0$ y el siguiente punto en el que la cicloide toca al eje x se obtiene cuando $t = 2\pi$, pues ahí $y = 0$.

Además, $f'(t) = 4(1-\cos t)$, por lo que el área buscada es:

$$\begin{aligned}A &= 16\left|\int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\, dt\right| = 16\left|\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right)\, dt\right| \\ &= 16\left|\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)\, dt\right| = 16\left|\frac{3}{2}t - 2\operatorname{sen} t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\right|_0^{2\pi} = 48\pi.\end{aligned}$$

8. Aquí, $f'(t) = 4 - 2\cos t$, por lo que el área buscada es:

$$\begin{aligned}A &= \left|\int_0^{2\pi} (4-2\cos t)^2\, dt\right| = \left|\int_0^{2\pi} \left(16 - 16\cos t + 4\cos^2 t\right)\, dt\right| \\ &= \left|\int_0^{2\pi} \left(16 - 16\cos t + 4\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}\right)\, dt\right| = \left|\int_0^{2\pi} (18 - 16\cos t + 2\cos 2t)\, dt\right| \\ &= |18t - 16\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t|_0^{2\pi} = 36\pi.\end{aligned}$$

9. La curva se muestra en al figura 57. En este caso, $f'(t) = 3t^2$, $g'(t) = 2t$, luego la longitud de arco es:

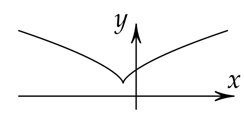


Figura 57.

$$
\begin{aligned}
L &= \int_{-2}^{2} \sqrt{9t^4 + 4t^2}\, dt = \int_{-2}^{2} |t| \sqrt{9t^2 + 4}\, dt \\
&= -\int_{-2}^{0} t\sqrt{9t^2 + 4}\, dt + \int_{0}^{2} t\sqrt{9t^2 + 4}\, dt.
\end{aligned}
$$

Si se hace $u = 9t^2 + 4$, entonces $\frac{1}{18} du = t\, dt$. Por lo tanto,

$$\int \sqrt{9t^2 + 4}\, dt = \frac{1}{18} \int u^{1/2}\, du = \frac{1}{27} u^{3/2} = \frac{1}{27}(9t^2 + 4)^{3/2}.$$

De modo que

$$L = -\frac{1}{27}(9t^2 + 4)^{3/2}\Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{27}(9t^2 + 4)^{3/2}\Big|_{0}^{2} = \frac{1}{27}(40^{3/2} - 16).$$

El área es:

$$A = 3\int_{-2}^{2} (t^2 + 1)t^2)\, dt = 3\left[\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3\right]_{-2}^{2} = \frac{272}{5}.$$

10. $f(\theta) = \tan\theta \Rightarrow f'(\theta) = \sec^2\theta$, entonces el área es:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi/6} \sec^2\theta \sec^2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/6} (1 + \tan^2\theta) \sec^2\theta\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/6} \sec^2\theta\, d\theta + \int_0^{\pi/6} \tan^2\theta \sec^2\theta\, d\theta \\
&= \tan\theta|_0^{\pi/6} + \frac{1}{3}\tan^3\theta\Big|_0^{\pi/6} = \frac{13}{24}.
\end{aligned}
$$

11. $f(t) = 4t^2$, $g(t) = 2t^3 \Rightarrow f'(t) = 8t$, $g'(t) = 6t^2$. Luego:

$$L = \int_0^2 \sqrt{64t^2 + 36t^4}\, dt = \int_0^2 t\sqrt{64 + 36t^2}\, dt.$$

Haciendo $u = 64 + 3t^2$, entonces $du = 72t\, dt$. Si $t = 0$, entonces $u = 64$ y si $t = 2$, entonces $u = 208$; por lo tanto,

$$L = \frac{1}{72}\int_{64}^{208} u^{1/2}\, du = \frac{1}{128} u^{3/2}\Big|_{64}^{128} = \frac{16}{27}(13^{3/2} - 8).$$

12. El área sombreada que aparece en el enunciado del ejercicio es tres veces el área sombreada que aparece a la derecha en la figura 58. Esta, a su vez, es el doble del área sombreada que aparece sobre el eje x en el I cuadrante. Esta área es $A_1 = A_2 - A_3$, donde A_2 es el área bajo la hipocicloide considerada desde su extremo derecho hasta el punto P y A_3 es el área bajo la circunferencia, considerada desde el punto donde corta al eje x positivo hasta el punto P (esta última es la región pequeña de color negro en la figura 58).

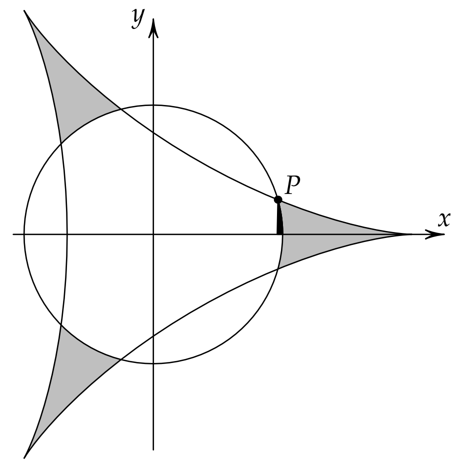


Figura 58.

Cálculo de A_2. El extremo derecho de la hipocicloide se obtiene cuando $t = 0$ pues en ese caso $x = 8$, $y = 0$. Por otra parte, el punto P es la intersección entre la circunferencia y la hipocicloide. La ecuación de la circunferencia se puede escribir como $x^2 + y^2 = 36$. Ahora, se sustituye, en esta ecuación, la x e y que definen la hipocicloide:

$$\begin{aligned}
(8\cos t + 4\cos 2t)^2 + (8\operatorname{sen} t - 4\operatorname{sen} 2t)^2 &= 36\\
4\cos^2 t + 4\cos t\cos 2t + \cos^2 2t + 4\operatorname{sen}^2 t - 4\operatorname{sen} t\operatorname{sen} 2t + \operatorname{sen}^2 2t &= \frac{9}{4}\\
\cos t\cos 2t - \operatorname{sen} t\operatorname{sen} 2t &= -\frac{11}{16}\\
\cos 3t &= -\frac{11}{16}
\end{aligned}$$

Luego, $3t = \cos^{-1}(-\frac{11}{16}) \Rightarrow t = \frac{1}{3}\cos^{-1}(-\frac{11}{16}) = 0{,}77628$. En este caso, $f(t) = 8\cos t + 4\cos 2t$, por lo que $f'(t) = -8\operatorname{sen} t - 8\operatorname{sen} 2t$. Por lo tanto, el área A_2 bajo la hipocicloide es:

$$\begin{aligned}
A_2 &= \left|\int_0^{0{,}77628} (8\operatorname{sen} t - 4\operatorname{sen} 2t)(-8\operatorname{sen} t - 8\operatorname{sen} 2t)\, dt\right|\\
&= \left|\int_0^{0{,}77628} (-64\operatorname{sen}^2 t + 32\operatorname{sen}^2 t - 32\operatorname{sen} t\operatorname{sen} 2t)\, dt\right|\\
&= \left|\int_0^{0{,}77628} [-32(1-\cos 2t) + 16(1-\cos 4t) - 64\operatorname{sen}^2 t\cos t]\, dt\right|\\
&= \left|-16t + 16\operatorname{sen} 2t - 4\operatorname{sen} 4t - \frac{64}{3}\operatorname{sen}^3 t\right|_0^{0{,}77628} = 3{,}90343.
\end{aligned}$$

Cálculo de A_3. Cuando $t = 0,77628$, el valor de x en el punto P, calculado en la ecuación de la hipocicloide, es $8\cos(0,77628) + 4\cos(1,55256) = 5,7811$. En ese caso, para la circunferencia se tiene $6\cos t = 5,7811$, por lo que $t = 0,27$. Para la circunferencia, $f'(t) = -6\,\mathrm{sen}\,t$. Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned} A_3 &= \left| \int_0^{0,27} (-36\,\mathrm{sen}^2\,t)\,dt \right| \\ &= 18\int_0^{0,27} (1-\cos 2t)\,dt \\ &= 18\left[t - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}^2\,t \right]_0^{0,27} = 0,23. \end{aligned}$$

El área total buscada es $A = 6(3,90343 - 0,23) = 22,04058$.