UNIVERSIDAD ESTATAL A DISTANICA
ESCUELA DE CIENCIA EXACTAS Y NATURALES

GUÍA DE ESTUDIO PARA EL CURSO

MATEMÁTICAS PARA COMPUTACIÓN I

Código 3068

ALBERTO SOTO AGUILAR

UNED
UNIVERSIDAD ESTATAL A DISTANCIA
Institución Benemérita de la Educación y la Cultura

2009

Producción Académica
Licda Ana Mª Sandoval Poveda.

Digitación y diagramación a cargo del Autor.

Revisión filológica
M.L. Óscar Alvarado Vega.

Presentación

La cátedra de Matemáticas Intermedias les saluda y les desea que el curso de Matemáticas para Computación I llene sus expectativas para la carrera de diplomado en Informática, carrera que usted sigue en la Universidad Estatal a Distancia. Como cátedra, es para nosotros una gran responsabilidad y una obligación brindarle las herramientas necesarias para que su aprendizaje se logre no solo en el tiempo esperado, sino también en la profundidad que la materia requiere.

Quizá aquí sea conveniente describir qué los tópicos de este curso tocan elementos de lo que se conoce como Matemática discreta, la cuál es la rama de la Matemática que estudia la Teoría de conjuntos, la probabilidad, el conteo, las sucesiones, los grafos y árboles y las estructuras algebraicas. A diferencia de otras partes de la Matemática (como el Cálculo que trata con fenómenos continuos) en esta área el interés se centra en lo discreto.

El libro que se usará es *Estructuras de Matemáticas discretas para la Computación* escrito por B. Kolman, R. Busby y S. Ross, editado por Prentice–Hall Hispanoamericana, S.A. Dado que el material de este curso no es un texto de educación a distancia, se hace necesario poner pautas y ritmos de estudio. Por esto, con la finalidad de que usted cuente con una guía del texto para su beneficio y ayudar en su aprendizaje, se ha escrito este documento.

En esta guía, usted encontrará un resumen del capítulo 1, así como los conceptos más relevantes del tópico que desarrolla la misma. Luego, se presentará una serie de ejemplos resueltos, tomados de la lista de ejercicios del libro, con comentarios acerca de los detalles de la solución. Al finalizar cada sección, usted encontrará los ejercicios recomendados para esa sección del capítulo. Al final de cada usted encontrará un examen de autoevaluación cuya solución aparece al final de la guía. Hemos querido tomar ejercicios de exámenes anteriores para que usted se habitúe al tipo de redacción de los ejercicios nuestros.

Para que saque el mejor provecho a esta guía, considere las siguientes sugerencias:

- Lea las orientaciones del curso para que conozca los objetivos específicos de la materia.
- Lea, en esta guía, el resumen de cada sección para que conozca la materia que va a estudiar.
- Lea la sección del libro. Trate de entender la solución a los ejemplos presentados.
- Lea los ejemplos resueltos que se presentan aquí y trabaje los ejercicios planteados.
- En el momento del repaso, trate cada ejemplo como si fuera un ejercicio.
- Haga los ejercicios de autoevaluación cuando termine la mayoría de los ejercicios del libro.

Recuerde que tanto estas soluciones como las soluciones de los ejemplos del libro, le serán de más ayuda si dedicó una parte de su tiempo a tratar de resolverlos por usted mismo.

Tome en consideración que en esta guía se utiliza la coma para la separación decimal, que es lo habitual en Costa Rica, aunque el texto al que hacemos referencia utilice el punto.

Es nuestro interés mejorar cada día y este documento se verá enriquecido con las sugerencias e indicaciones que usted nos haga llegar. Como toda obra humana, este texto es sujeto de mejora constante y depende de ustedes que se logre la finalidad buscada.

Estamos para servirle pero también necesitamos que usted nos ayude.

Atentamente

Lic. Alberto Soto A.

Profesor, Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

UNED

Tabla de contenidos

Capítulo 1. Conceptos fundamentales

Este capítulo no tiene un eje temático particular, sino que más bien es una recopilación de conceptos y tópicos que, de alguna manera, se han estudiado en la enseñanza secundaria. Quizá esto lo hace un capítulo un poco inusual con respecto a los otros. Cada sección debe tratarse por aparte. Su tarea como lector o lectora es conciliar los conceptos que conoce con los que le presenta el libro. De esta forma iniciaremos el estudio de la Matemática discreta.

1.1 y 1.2 Conjuntos y subconjuntos, operaciones con conjuntos

Estas dos secciones corresponden al mismo tópico: el estudio de la teoría de conjuntos.

Revise la notación que encontrará en las páginas 2 y 3 que representa respectivamente la pertenencia de elementos en un conjunto y la inclusión de conjuntos en otro $\in$ y $\subseteq$, y cuándo debe utilizarse cada una de ellas. Hay un pequeño error en la página 2. Es conveniente aclarar que los números naturales están definidos como el conjunto de los números enteros positivos, por lo que debe decir $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

¿Qué se espera que usted entienda?

1. Un conjunto es una colección de objetos agrupados según algún criterio o característica que no sea contradictoria en sí misma.

2. Un conjunto es vacío cuando carece de elementos. Las notaciones que se usan para este conjunto son dos: el símbolo $\varnothing$ o la escritura $\{\quad\}$.

3. La cardinalidad de un conjunto es el número de elementos de él. Un conjunto puede ser finito o infinito. El número de elementos del A se escribe $|A|$ y se lee: cardinalidad de A.

4. Muchas veces se definen los conjuntos **por comprensión**, al indicar una propiedad que cumplan sus elementos y se escribe $A = \{x|x \dots\}$ y esta se lee "A es igual al conjunto de las x tal que $x \dots$".

5. Es importante recalcar que la notación $\in$ se utiliza exclusivamente para los elementos del conjunto, mientras que $\subseteq$ se usa para relacionar conjuntos. Así, si $A = \{3, \triangle, @, *\}$ podemos escribir $\triangle \in A$ pero la expresión $\triangle \subseteq A$ no la debemos escribir. Ahora, si se define $B = \{x \in A|x \text{ es un número}\}$, entonces podemos escribir $B \subseteq A$. En este caso $B = \{3\}$ un conjunto de cardinalidad 1 o unitario; en este caso la notación que se emplea es $|B| = 1$. Tampoco debemos escribir $B \in A$.

6. Algunas veces nos interesa representar conjuntos por medio de diagramas "de Venn": estos dibujos representan los elementos por medio de puntos y los conjuntos por medio de círculos o curvas cerradas, como los de la página 3. Son muy simples y útiles. Recuerde que aquí utilizamos la existencia del conjunto que contiene a todos los elementos llamado **conjunto universal** o **universo**, por esto, el conjunto de estudio es subconjunto de este conjunto universal; en este caso, este conjunto se representa por medio de un rectángulo.

7. El conjunto potencia corresponde al conjunto formado por todos los subconjuntos de un conjunto dado. Note que el conjunto potencia es un conjunto de conjuntos, esto es, sus elementos son conjuntos. Por ejemplo, si $A = \{a, b\}$, entonces el conjunto potencia de A, que se denota $P(A)$, es

$$P(A) = \{\{\quad\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \text{ o bien } P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, A\}$$

   $P(A)$ es un conjunto formado por 4 elementos. El número de elementos del conjunto potencia de un conjunto de n elementos es 2^n; en símbolos $|P(A)| = 2^{|A|}$.

8. Es importante conocer las operaciones de unión, intersección y diferencia entre conjuntos y sus propiedades. En palabras sencillas podemos decir que:

   Unión ($\cup$) Agrupar todos los elementos de dos conjuntos para formar uno nuevo, aquellos elementos repetidos se contarán y se escribirán solo una vez.

   Intersección ($\cap$) Agrupar los elementos comunes a ambos conjuntos y formar un nuevo conjunto.

   Diferencia ($-$) Agrupar los elementos que solo pertenecen al primero de los conjuntos. En el libro se le llama complemento del segundo con respecto al primero, pero es más sencillo decirle diferencia.

Diferencia simétrica ($\bigoplus$) Agrupa los elementos que pertenecen a uno de los conjuntos, pero no a ambos.

Cuando se utiliza el complemento con respecto al conjunto universal, se simplifica la notación al escribir $\overline{A}$ y con ello, cualquier otro complemento B, se puede obtener con la intersección del conjunto original con el complemento al conjunto universal; de esta forma se tiene $A - B = A \cap \overline{B}$.

Algunos detalles importantes:

- $A \cup B = A$, solo cuando $B \subseteq A$, en este caso se cumplirá que $A \cap B = B$.
- $A \cap B = \varnothing$, si A y B no tienen elementos en común, en este caso se llaman conjuntos **disjuntos**.
- $A - B = A$, solo cuando $A \cap B = \varnothing$. ¿Cuánto es $A - B$ si $A \subseteq B$?
- $(A - B) - C \neq A - (B - C)$, esto significa que la diferencia no es asociativa y requiere el uso de paréntesis. En otras palabras $A - B - C$, es una expresión ambigua que no debemos escribir.

9. El teorema 1 de la página 10 enumera las propiedades que cumple la unión, la intersección y el complemento. Destaquemos 6 de las 19 propiedades. Las propiedades 3 y 4, nos indican que los paréntesis en la expresión $A \cap (B \cap C)$ no son necesarios y que tanto la intersección como la unión de conjuntos, se pueden hacer en el orden que deseemos. Las propiedades 5 y 6 nos indican la regla de distribución que se sigue al hacer una unión y una intersección o viceversa. Las propiedades 14 y 15, llamadas Leyes de De Morgan, indican cómo calcular el complemento de una unión o una intersección.

10. Los teoremas 2 y 3 permiten calcular la cardinalidad de un conjunto conociendo la cardinalidad de algunas partes de él. El principio de adición debe aplicarse al estilo de los ejemplos 8 y 9 de la página 12.

11. En algunos ejemplos y ejercicios se solicita hacer una **demostración**; esto significa que utilizando las definiciones y los teoremas (resultados) que se conocen es posible asegurar que un hecho se cumple. En todas las demostraciones existe una hipótesis (premisa que se considera verdadera) y una tesis (premisa que hay que demostrar).

Ejemplos resueltos

1. Sea $A = \{x | x \text{ es un número real y } x < 6\}$. Indique en cada caso si la afirmación es verdadera o falsa.

afirmación	$3 \in A$	$6 \in A$	$5 \notin A$	$8 \notin A$	$-8 \notin A$	$3{,}4 \notin A$
condición						

Solución: Para saber si la afirmación es verdadera o falsa se debe verificar si el número propuesto cumple, o no, con las condiciones indicadas: primero, observe que todos los números son reales; luego, hay que revisar su relación de orden respecto a 6,

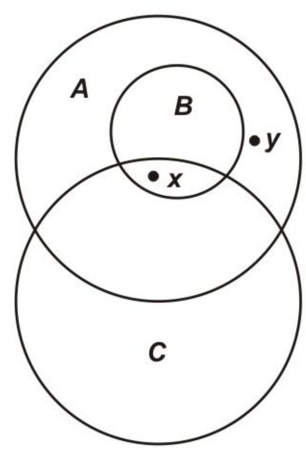
- $3 \in A$ es verdadero pues $3 < 6$.
- $6 \in A$ es falso pues $6 = 6$ y la condición es ser menor que 6.
- $5 \notin A$ es falso pues $5 \in A$, ya que $5 < 6$.
- $8 \notin A$ es verdadero pues $8 > 6$.
- $-8 \notin A$ es falso, pues al contrario $-8 \in A$, ya que $-8 < 6$.
- $-3{,}4 \notin A$ es falso, pues $-3{,}4 \in A$ al ser $-3{,}4 < 6$.

En resumen:

afirmación	$3 \in A$	$6 \in A$	$5 \notin A$	$8 \notin A$	$-8 \notin A$	$3{,}4 \notin A$
condición	Verdadero	Falso	Falso	Verdadero	Falso	Falso

2. Considere el conjunto $\{x|x \in \mathbb{Z}\}$ y $x^2 < 12$. Enliste sus elementos.
Solución: La lista es $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ pues consiste en describir al conjunto por extensión. Cualquier otro número entero tiene un cuadrado mayor que 12.

3. Considere el siguiente diagrama de Venn y determine la validez de las siguientes afirmaciones:



(a) $A \subseteq B$

(b) $B \subseteq A$

(c) $C \subseteq B$

(d) $x \in B$

(e) $x \in A$

(f) $y \in B$

Solución:

(a) $A \subseteq B$. Falso. Al contrario, $B \subseteq A$.

(b) $B \subseteq A$. Verdadero.

(c) $C \subseteq B$. Falso. B y C comparten elementos pero no hay relación de inclusión en ningún sentido.

(d) $x \in B$. Verdadero.

(e) $x \in A$. Verdadero.

(f) $y \in B$. Falso. $y \notin B$.

4. Si $A = \{3, 7, 2\}$, encuentre $P(A)$, $|A|$ y $|P(A)|$.
Solución: Como se mencionó, $P(A)$ contiene a todos los subconjuntos de A. Así

$$P(A) = \{\varnothing, \{3\}, \{7\}, \{2\}, \{3, 7\}, \{3, 2\}, \{7, 2\}, A\}$$

y como $|A| = 3$, comprobamos que $|P(A)| = 2^3 = 8$.

5. Demuestre que si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.
Solución: Para hacer esta demostración[1] se deben utilizar los hechos y las definiciones relacionadas con subconjuntos e inclusión de conjuntos. Además, se considera como verdadera la hipótesis, en este caso $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Luego hay que probar la tesis, que para este ejemplo es $A \subseteq C$. Para hacerlo debemos probar que todos los elementos de A son también elementos de C, pues esto afirma la definición de subconjunto. Además, hay que tener presente que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. En efecto, la primera de las condiciones dice que todo elemento de A es elemento de B, y la segunda dice que todo elemento de B pertenece a C también. Entonces, todo elemento de A es también de C.

6. Sea $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k\}$ el conjunto universal, $A = \{a, b, c, g\}$, $B = \{d, e, f, g\}$, $C = \{a, c, f\}$ y $D = \{f, h, k\}$. Calcule:

Conjunto	$A \cup D$	$B \cup D$	$C \cap D$	$A \cap D$	$B - C$	$\overline{B}$	$C - B$,	$C \oplus D$
Resultado								

Solución:

- $A \cup D$: primero se colocan los elementos de A y se añaden los de D. Como no hay elementos comunes, el nuevo conjunto tiene siete elementos, por lo que se puede escribir *por extensión* $A \cup D = \{a, b, c, g, f, h, k\}$.
- $B \cup D$: es igual a $\{d, e, f, g, h, k\}$, solo que ahora f está en ambos conjuntos y por eso se toma solo una vez.

[1]En el capítulo 2 se ahondará en el tema de demostraciones lógicas.

- $C \cap D$: tomamos solo los elementos comunes, esto es, $\{f\}$.
- $A \cap D$: como no hay elementos comunes en A y D entonces $A \cap D = \varnothing$.
- $B - C$: contiene los elementos de B que no están en C, esto es $\{d, e, g\}$.
- $\overline{B}$: es el conjunto complementario a B y contiene a todos los elementos de U que no pertenecen a B, o sea $\{a, b, c, h, k\}$.
- $C - B$: contiene los elementos de C que no están en B, así obtenemos $\{a, c\}$.
- $C \oplus D$: contiene a los elementos que pertenecen solo a uno de los conjuntos, así contiene a a ya que $a \in C - D$ y también incluye a h pues $h \in D - C$, de la misma forma para c y k; por esto nos queda $C \oplus D = \{a, c, h, k\}$.

En resumen:

Conjunto	$A \cup D$	$B \cup D$	$C \cap D$	$A \cap D$
Resultado	$\{a, b, c, g, f, h, k\}$	$\{d, e, f, g, h, k\}$	$\{f\}$	$\varnothing$
Conjunto	$B - C$	$\overline{B}$	$C - B$,	$C \oplus D$
Resultado	$\{d, e, g\}$	$\{a, b, c, h, k\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c, h, k\}$

7. Sea $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ el conjunto universal, considere $A = \{a, c, f, g\}$, $B = \{a, e\}$, $C = \{b, h\}$. Calcule:

Conjunto	$\overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{B} \cup \overline{C}$	$\overline{A \cup A}$	$\overline{C} \cap \overline{C}$	$A \oplus B$	$B \oplus C$
Resultado						

Solución: Una manera de calcular estos conjuntos es utilizando propiedades del teorema 1.

- Así, en lugar de calcular $\overline{A} \cap \overline{B}$, calculamos $\overline{A \cup B} = \{b, d, h\}$ que son los elementos que no están ni en A ni en B.
- Igual con $\overline{B} \cup \overline{C}$ pues calculamos $\overline{B \cap C}$ y como B y C no tienen elementos comunes, el resultado de este complemento es U.
- $\overline{A \cup A} = \overline{A} = \{b, d, e, h\}$ que son los que no están en A.
- $\overline{C} \cap \overline{C} = \overline{C} = \{a, c, d, e, f, g\}$ que son los elementos que no pertenecen a C.
- $A \oplus B$ contiene a los elementos que pertenecen a uno de los dos pero no a ambos, en este caso, $A \oplus B = \{c, f, g, e\}$
- $B \oplus C = \{a, e, b, h\}$.

En resumen:

Conjunto	$\overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{B} \cup \overline{C}$	$\overline{A \cup A}$	$\overline{C} \cap \overline{C}$	$A \oplus B$	$B \oplus C$
Resultado	$\{b, d, h\}$	U	$\{b, d, e, h\}$	$\{a, c, d, e, f, g\}$	$\{c, f, g, e\}$	$\{a, e, b, h\}$

8. Sea $A = \{x|x \in \mathbb{N}$ y $x < 8\}$, $B = \{x|x \in \mathbb{Z}$ y $2 \leq x \leq 4\}$ y $C = \{x|x \in \mathbb{Z}$ y $x^2 < 16\}$. Calcule $|A \cup B \cup C|$.
   Solución: Para calcular esta cardinalidad podemos hacer la unión de los conjuntos y luego contar los elementos, o bien, usar el teorema 3; en cualquiera de los dos casos es mejor conocer los elementos de cada conjunto. Por extensión $A = \{1, 2, \ldots, 7, 8\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ y $C = \{-3, -2, \ldots, 2, 3\}$. Note que $A \cup B \cup C = \{-3, -2, \ldots, 7, 8\}$, un conjunto con 12 elementos.

Ejercicios recomendados: de las páginas 4 y 5, del 1 al 20 y de las páginas 12, 13 y 14 del 1 al 19 y del 26 al 30.

1.3 Sucesiones

Una sucesión es una lista infinita ordenada de objetos; en particular, nos interesan cuando los objetos son números reales. En general, hay dos formas para definir una sucesión:

1. Por medio de una fórmula que determine el enésimo elemento de la sucesión en función de su posición, por ejemplo: $a_n = 5^n$.

2. Utilizando los elementos anteriores de manera que el enésimo elemento se determina al conocer todos los elementos anteriores. Esta forma se llama **recursiva**, por ejemplo: $a_n = 2a_{n-1}$, $n \geq 2$ y $a_1 = 3$.

Estudie únicamente las páginas 14 a 18, hasta la parte de la definición de conjunto numerable. Note que las funciones características se definen básicamente para representar un conjunto en forma binaria. Con estas funciones, cualquier conjunto finito puede representarse como una secuencia de unos y ceros. Esto es importante pues las computadoras utilizan el sistema binario. Con las funciones características, las operaciones de conjuntos (unión, intersección, diferencia y complemento) pueden ser vistas como operaciones entre funciones.

La parte concerniente a cadenas y expresiones regulares puede omitirla, pues no es parte de la evaluación.

Ejemplos resueltos

1. Determine el conjunto correspondiente de la sucesión $0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$.
Solución: El conjunto es $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$. Al observar ambas expresiones da la impresión de que la sucesión y el conjunto correspondiente a la sucesión es lo mismo. Por eso es importante notar la diferencia. La sucesión es una lista ordenada por aparición, mientras que el conjunto correspondiente a la sucesión no está escrito en un orden particular; solo importa que estén todos los elementos.

2. Escriba los cuatro primeros términos de la sucesión $b_n = 3n^2 + 2n - 6$ y de la sucesión $d_1 = -3$, $d_{n+1} = -2d_n + 1$.
Solución:

n	b_n	d_n
1	$b_1 = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 6 = -1$	$d_1 = -3$
2	$b_2 = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 6 = 10$	$d_2 = -2d_1 + 1 = -2(-3) + 1 = 7$
3	$b_3 = 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 6 = 27$	$d_3 = -2d_2 + 1 = -2(7) + 1 = -13$
4	$b_4 = 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 - 6 = 50$	$d_4 = -2d_3 + 1 = 27$

En resumen:

n	1	2	3	4
b_n	-1	10	27	50
d_n	-3	7	-13	27

3. Escriba una fórmula para el término de orden n de la sucesión $0, 3, 8, 15, 24, 35, \ldots$.
Solución: En general, buscar una fórmula para una sucesión no tiene solución (piense en la sucesión de números premiados con el mayor en la lotería nacional), si existiera una fórmula para cualquier sucesión eso equivaldría a decir que el azar no existe. Por ello, la solución plantada solo funciona para casos muy particulares, como el de este ejemplo. Para este ejercicio, es posible dar una regla basada en la observación de la sucesión,

n	1	2	3	4	5	6
a_n	0	3	8	15	24	35

Note que con estos valores podemos formar la sucesión de diferencias consecutivas $d_n = a_{n+1} - a_n$, esto es, formamos una nueva sucesión d_n con las diferencias de uno de los elementos con su antecesor.

n	1	2	3	4	5	6
a_n	0	3	8	15	24	35
d_n	$3 - 0 = 3$	$8 - 3 = 5$	$15 - 8 = 7$	$24 - 15 = 9$	$35 - 34 = 11$	

con esto formamos la sucesión $3, 5, 7, 9, 11, \ldots$ que es una sucesión un poco más conocida. Si aún no la reconoce, note que la diferencia consecutiva de esta nueva sucesión es constante, en este caso 2, o lo que es lo mismo, note que va de 2 en 2 empezando en 3. Esto lo escribimos como $d_n = 2n + 1$ para $n \geq 1$ entonces $2n + 1 = d_n = a_{n+1} - a_n$ o sea $a_{n+1} = 2n + 1 + a_n$ con $a_1 = 0$. La fórmula encontrada para esta sucesión es recursiva y no es la única. De hecho, si partimos de observar la sucesión original y le sumamos 1 a cada elemento, obtenemos otra sucesión $1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$ esta es otra sucesión conocida, que corresponde a los cuadrados de los números naturales; en otras palabras, $n^2 = a_n + 1$ o bien $a_n = n^2 - 1$ y obtenemos una fórmula explícita para la misma sucesión. Este tipo de procesos solo los podremos llevar a cabo con éxito, si se tiene práctica y conocimiento de sucesiones.

4. Sea $U = \{b, d, e, g, h, k, m, n\}$ el conjunto universal, considere $B = \{b\}$, $C = \{d, g, m, n\}$ y $D = \{d, k, n\}$. Calcule f_B, f_C y f_D. Represente por arreglos de ceros y unos a los conjuntos: $B \cup C$ y $C \cap D$.

   Solución: Se definen las funciones:

   $$f_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = b\,; \\ 0, & \text{si } x \neq b. \end{cases},$$

   $$f_C(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = d, g, m, n\,; \\ 0, & \text{si } x \neq d, g, m, n. \end{cases} \text{ y}$$

   $$f_D(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = d, k, n\,; \\ 0, & \text{si } x \neq d, k, n. \end{cases}$$

   Con estas funciones B, C y D, se representan por:

   $B \to \boxed{1\,|\,0\,|\,0\,|\,0\,|\,0\,|\,0\,|\,0\,|\,0}$

   $C \to \boxed{0\,|\,1\,|\,0\,|\,1\,|\,0\,|\,0\,|\,1\,|\,1}$

   $D \to \boxed{0\,|\,1\,|\,0\,|\,0\,|\,0\,|\,1\,|\,0\,|\,1}$

   Con estos arreglos es muy sencillo encontrar los correspondientes a los conjuntos $B \cup C$ y $C \cap D$.

   Coloquemos los dos arreglos para formar el arreglo correspondiente a $B \cup C$, colocando un cero solo cuando en esa misma posición los dos arreglos tienen un cero.

   Para la intersección se colocan los dos arreglos y se pone un 1 solo cuando ambos tienen un 1 en esa misma posición.

   $B \cup C \to \boxed{1\,|\,1\,|\,0\,|\,1\,|\,0\,|\,0\,|\,1\,|\,1}$ $\quad C \cap D \to \boxed{0\,|\,1\,|\,0\,|\,0\,|\,0\,|\,0\,|\,0\,|\,1}$

Ejercicios recomendados: de la página 21, del 1 al 19 y del 22 al 24.

1.4 División en los enteros

Esta sección estudia las propiedades del máximo común divisor (MCD) y el mínimo común múltiplo (MCM). Aunque son propiedades que usted ya conoce, es muy importante que pueda calcular el MCD y MCM en forma algorítmica. En el algoritmo de la página 23 hay un error en el paso 3. En lugar de "más pequeño" debe ser "más grande".

Ejemplos resueltos

1. Escriba los números enteros $1\,666$ y $1\,125$ como producto de números primos.
   Solución: Es conveniente iniciar la búsqueda de factores primos utilizando las reglas de divisibilidad por 2, 3 y 5; esto nos ayudará a utilizar números más pequeños. Al dividir $1\,666$ por 2, pues el número es par, se obtiene: $1\,666 \div 2 = 833$. Luego, usamos el algoritmo indicado en la página 23, calculando el número entero más grande menor que $\sqrt{833}$; como $\sqrt{833} \approx 28{,}86$ se hará una búsqueda más corta. Entonces, se tiene que si 833 no es un número primo, debe tener un divisor primo menor que 28. Los primos menores que 28 son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 y 23, dado que el 833 no es ni par ni divisible por 3, ni por 5, probamos con 7: $833 \div 7 = 119$, volvemos a probar con 7, $119 \div 7 = 17$ y como 17 es un número primo, se tiene que $1\,666 = 2 \cdot 7^2 \cdot 17$. Para el número $1\,125$, empezamos dividiendo por 5 (aunque puede ser primero por tres[2]) y se obtiene $1\,125 \div 5 = 225$, volvemos a dividir por 5, $225 \div 5 = 45$ y una vez más $45 \div 5 = 9$ y como $9 = 3^2$ se tiene que $1\,125 = 5^3 \cdot 3^2$.

2. Determine el máximo común divisor de 34 y 58. Encuentre los enteros s y t tales que $34s + 58t$ sea este máximo.
   Solución: El procedimiento para hacer las dos cosas a la vez consiste en aplicar el algoritmo de la división euclidiana a 58 y 34, en este caso

   $$58 = 34 \cdot (1) + 24$$

   Luego se divide 34 por 24 y se obtiene

   $$34 = 24 \cdot (1) + 10$$

[2]La factorización puede hacerse en el orden deseado y esto no va a alterar el resultado

Después, se divide 24 por 10 y resulta

$$24 = 10 \cdot (2) + 4$$

Se divide 10 por 4 y se obtiene

$$10 = 4 \cdot (2) + 2$$

Por último, se vuelve a dividir 4 por 2 y se obtiene $4 = 2 \cdot (2)$ y aquí se detiene el procedimiento. El máximo común divisor es 2. Ahora, para encontrar los enteros s y t tal que $34s + 58t = 2$, procedemos a la inversa. La igualdad que tiene al 2 como residuo es $10 = 4 \cdot (2) + 2$, si despejamos este residuo:

$$2 = 10 - 4 \cdot (2)$$

luego, el siguiente residuo antes que 2 es 4, en la igualdad $24 = 10 \cdot (2) + 4$; de aquí despejamos el 4, y se cambia por $4 = 24 - 10 \cdot (2)$, al sustituirlo en la igualdad nos queda: $2 = 10 - (24 - 10 \cdot (2)) \cdot (2) = 24 \cdot (-2) + 10 \cdot (5)$. Hasta aquí:

$$2 = 24 \cdot (-2) + 10 \cdot (5)$$

Ahora, siguiendo con los residuos de la igualdad $34 = 24 \cdot (1) + 10$, se despeja el 10 y queda $10 = 34 - 24 \cdot (1)$.

Así $2 = 24 \cdot (-2) + (34 - 24 \cdot (1)) \cdot (5) = 34 \cdot (5) + 24 \cdot (-7)$. De manera que

$$2 = 34 \cdot (5) + 24 \cdot (-7)$$

Por último, el primer residuo fue 24 y se cambia por $24 = 58 - 34$, y nos queda

$$2 = 34 \cdot (5) + (58 - 34) \cdot (-7) = 34 \cdot (12) + 58 \cdot (-7)$$

Con esto se encuentran los enteros $s = 12$ y $t = -7$ tales que $2 = 34s + 58t$.

3. Encuentre el mínimo común múltiplo de los enteros 175 y 245.
   Solución: Si factorizamos 175 y 245 se obtiene $175 = 5^2 \cdot 7$, $245 = 5 \cdot 7^2$, por lo que el mínimo común múltiplo es $N = 5^2 \cdot 7^2 = 1\,225$.

Ejercicios recomendados: de las páginas 29 y 30, del 1 al 16.

1.5 Matrices

Esta sección introduce un conjunto de objetos llamados matrices. Una matriz, como indica el texto, es un arreglo rectangular de números dispuestos en renglones (o filas) y columnas, de manera que cada número ocupa una posición en un renglón y una columna específicos. Las matrices son con frecuencia muy utilizadas para colocar datos provenientes de diferentes cualidades y diversas características.

Es posible que al ver una tabla de posiciones en un torneo deportivo usted no piense que lo que está mirando es una matriz; tomemos, por ejemplo, la tabla de posiciones del fútbol nacional, cada equipo es la etiqueta del renglón respectivo y las diferentes estadísticas de este equipo están colocadas debajo de la característica correspondiente, esto es, en cada columna. Así, cada número determina una información específica dentro de este arreglo rectangular.

Se suele denotar a las matrices con letras mayúsculas y a sus elementos con letras minúsculas con dos subíndices; de esta forma, si A es una matriz de 3 renglones y 4 columnas escribimos 3×4 (se lee "tres por cuatro"). Para indicar al elemento que está en el primer renglón[3] y la tercera columna escribimos a_{13} se lee "a sub uno-tres" o bien, si se desea señalar el elemento que ocupa la esquina inferior derecha del arreglo escribimos a_{34} y se lee "a sub tres-cuatro".

Hay reglas para operar matrices que definen la suma y la multiplicación a partir de los elementos que la componen. Primero, las matrices deben ser compatibles para ser operadas: Para sumar matrices es necesario que ambas sean del mismo tamaño (número de renglones y número de columnas) y el resultado será de ese mismo tamaño. Para multiplicar, se debe cumplir que el número de columnas de la matriz de la izquierda coincida con el número de renglones de la matriz de la derecha; en este caso, el resultado es una matriz con el número de renglones igual a la matriz de la izquierda y con el número de columnas igual a la matriz de la derecha.

En símbolos:

- Si A es $n \times m$ y B es $n \times m$ entonces $A + B$ es $n \times m$.
- Si A es $n \times m$ y B es $m \times p$ entonces AB es $n \times p$.

[3] Los renglones se enumeran de arriba hacia abajo y las columnas de izquierda a derecha.

Por ejemplo: sean A, B y C las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 1 & 2 \\ -6 & -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 6 & 2 & -6 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & 1 \\ 7 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vamos a calcular $A+B$ y AC. $A+B$ se obtiene al sumar el elemento correspondiente de la matriz A con su homólogo en la matriz B:

$$A+B = \begin{bmatrix} -4+3 & 5+1 & 1+(-1) & 2+4 \\ -6+6 & -1+2 & 3+(-6) & -5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

Para calcular la matriz $D = AC$, el elemento d_{ij} se calcula tomando el renglón i de la matriz A y la columna j de la matriz C, luego se multiplica el primer elemento del renglón con el primer elemento de la columna, el segundo elemento del renglón con el segundo de la columna y así sucesivamente, para luego sumar todos estos productos. Ilustremos paso a paso lo anterior, con el cálculo de d_{23}:

El renglón 2 de A es $[-6,-1,3,-5]$ y la columna 3 de C es $[5,1,-1,0]$, así que la suma de productos que dan como resultado a d_{23} es

$$d_{23} = (-6)(5) + (-1)(1) + (3)(-1) + (-5)(0) = -30 - 1 - 3 = -34$$

Como A es 2×4 y C es 4×3, la matriz AC es 2×3, así que necesitamos hacer seis cálculos como el anterior para calcular la matriz AC. Después de hacer este cálculo se obtiene:

$$\begin{aligned}
d_{11} &= (-4)(-1) + (5)(2) + (1)(7) + (2)(4) = 29 \\
d_{12} &= (-4)(3) + (5)(-6) + (1)(0) + (2)(1) = -40 \\
d_{13} &= (-4)(5) + (5)(1) + (1)(-1) + (2)(0) = -16 \\
d_{21} &= (-6)(-1) + (-1)(2) + (3)(7) + (-5)(4) = 5 \\
d_{22} &= (-6)(3) + (-1)(-6) + (3)(0) + (-5)(1) = -17 \\
d_{23} &= (-6)(5) + (-1)(1) + (3)(-1) + (-5)(0) = -34
\end{aligned}$$

Así obtenemos $AC = \begin{bmatrix} 29 & -40 & -16 \\ 5 & -17 & -34 \end{bmatrix}$

Note que dos matrices no se podrán multiplicar si no cumplen la siguiente condición: el número de columnas de A debe ser igual al número de renglones de C. Y como es importante cuál es la matriz de la derecha y cuál de la izquierda, se tiene que: por lo general, AB y BA son matrices diferentes, inclusive, como en el caso anterior, AC existe pero CA no.

Además de las operaciones con matrices, esta sección define la matriz **transpuesta** a otra, como la matriz que tiene por renglones las columnas de la matriz original, en el mismo orden. Esto significa que si la matriz original es de tamaño $m \times n$, entonces la transpuesta es de tamaño $n \times m$. Hay ocasiones que al transponer una matriz, se obtiene la misma matriz, y en estos casos se le llama **simétrica**.

En aquellos casos en que una matriz tenga el mismo número de renglones que de columnas se le llama **cuadrada** y en este caso es posible calcular las potencias de una matriz.

Los teoremas 1 y 2 son importantes pues determinan propiedades de la multiplicación y la suma de matrices. El teorema 3 incluye las propiedades de la transpuesta.

En esta sección también se definen operaciones sobre matrices **boolenas**, compuestas únicamente de ceros y unos. En este caso, se definen tres operaciones: la primera denotada por $\vee$ se obtiene al comparar los elementos homólogos y es cero únicamente cuando ambos elementos son cero; la segunda, denotada por $\wedge$, coloca un uno solo si ambas posiciones son uno y cero en los otros casos. En ambas operaciones, se obtienen matrices del mismo tamaño que las matrices operadas. La tercera operación, en forma semejante a la multiplicación de matrices, compara cada elemento del renglón i con su homólogo de la columna j y el resultado del elemento ij es cero si no existe alguna coincidencia de unos en la misma posición.

El teorema 4 nos da las propiedades que cumplen estas operaciones.

Ejemplos resueltos

1. Sea $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$. Encuentre:

   (a) El tamaño de C

   (b) La diagonal principal de C

   (c) c_{13} y c_{31}.

   Solución:

   (a) C tiene 3 renglones y 3 columnas, por eso es de tamaño 3×3.

   (b) La diagonal principal está compuesta por los elementos $\{c_{11}, c_{22}, c_{33}\}$. En este caso: $\{2, 6, 8\}$.

(c) c_{13} es el elemento en el primer renglón y en la tercera columna, eso es $c_{13} = 4$. De la misma forma $c_{31} = 2$, el número en la posición simétrica.

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule, si es posible:

   (a) AB.

   (b) $BA + C$.

   (c) $(A + B^T)C$.

   (d) $AC + BC$.

   Solución:

   (a) Primero verificamos que exista. A es 2×3 y B es 3×2, por lo tanto la matriz AB existe y es de tamaño 2×2: $AB = \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) $BA + C$ existe, pues BA es 3×3 y C es 3×3. $BA = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 10 & 3 & -1 \\ 16 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ y

   $$BA + C = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 14 & 5 & 4 \\ 19 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (c) Primero $A + B^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ y como es de 2×3, se puede multiplicar por C. Así

   $$(A + B^T)C = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 26 \\ 20 & -3 & 32 \end{bmatrix}$$

   (d) No es posible calcularlo pues, aunque AC se pueda calcular, BC no existe.

3. Sea A una matriz $n \times n$:

   (a) Demuestre que AA^T y A^TA son matrices simétricas.

   (b) Demuestre que $A + A^T$ es simétrica.

   Solución:
   Demostración: Para probar que una matriz B es simétrica, debe demostrarse que el elemento b_{ij} es igual al elemento b_{ji}, o bien probar directamente que $B^T = B$. Las dos formas son equivalentes entre sí.

(a) 1ª forma: Sea $B = AA^T$, entonces el elemento b_{ij} se obtiene de multiplicar y sumar los elementos del renglón i de A con la columna j de A^T, pero esta columna es la misma que el renglón j de A. De igual forma, el renglón i de A es la columna i de A^T, así que es lo mismo que multiplicar y sumar los elementos del renglón j de A con la columna i de A^T, esto es b_{ji}.
2ª forma: Sea $B = AA^T$, entonces, $B^T = (AA^T)^T = (A^T)^T A^T$, esto por el teorema 3(c) página 34. Por el teorema 3(a) $(A^T)^T A^T = AA^T = B$. Con esto se prueba $B = B^T$. La otra parte del ejemplo es análoga.

(b) 1ª forma: Sea $B = A + A^T$, entonces b_{ij} se obtiene de sumar los elementos a_{ij} y a^T_{ij} pero el elemento $a^T_{ij} = a_{ji}$ y $a_{ij} = a^T_{ji}$ de manera que

$$b_{ij} = a_{ij} + a^T_{ij} = a^T_{ij} + a_{ji} = b_{ji}$$

2ª forma: Sea $B = A + A^T$, entonces $B^T = (A + A^T)^T = A^T + A$ por el teorema 3(b) y 3(c) y, por la conmutatividad de la suma de matrices (teorema 1(a)) se tiene que $B^T = B$.

4. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule:

(a) $A \vee B$

(b) $A \wedge B$

(c) $A \odot B$

Solución: Para cada ejemplo sea C la matriz resultado con entradas c_{11}, c_{12}, c_{21} y c_{22}

(a) $C = A \vee B$. Tenga presente que la entrada $c_{ij} = 0$ cuando a_{ij} y b_{ij} son simultáneamente cero. Por esto, $c_{ij} = 1$ en los cuatro casos. Así, $A \vee B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $C = A \wedge B$. Ahora $c_{ij} = 1$ solo cuando a_{ij} y b_{ij} son iguales a 1. Esto ocurre solo para c_{21}. Por eso, $A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) $C = A \odot B$. En este cálculo es más delicado y se hará paso a paso. Para c_{11} se observa la fila 1 de A y la columna 1 de B, se revisa si existe coincidencia de unos en la misma posición; en este caso, la segunda posición de estas partes son iguales a 1. Por lo que $c_{11} = 1$. Continuamos con c_{12}, en la fila 1 de A, el segundo elemento es un 1, al igual que el segundo elemento de la segunda columna de B, entonces $c_{12} = 1$. Para c_{21} y c_{22} no hay coincidencia pues el 1 está en la primera posición en la fila 2 de A, mientras que en la primera posición de ambas columnas de B hay 0. Por lo tanto, $A \odot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

5. Demuestre que $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
   Solución:
   Demostración: Sean $D = B \wedge C$, $E = A \vee B$, $F = A \vee C$, $G = A \vee D$ y $H = E \wedge F$. Así hay que probar que $G = H$. Se va a probar que si el elemento $g_{ij} = 1$, entonces $h_{ij} = 1$ o si $g_{ij} = 0$, entonces $h_{ij} = 0$ también.
   Caso 1. Supongamos que $g_{ij} = 1$, entonces se debe cumplir que $a_{ij} = 1$ o $d_{ij} = 1$, para que $d_{ij} = 1$ se debe tener que $b_{ij} = 1$ y $c_{ij} = 1$, entonces se tiene que o bien ($a_{ij} = 1$ y $b_{ij} = 1$) o ($a_{ij} = 1$ y $c_{ij} = 1$), por lo que $e_{ij} = 1$ y $f_{ij} = 1$, entonces $h_{ij} = 1$.
   Caso 2. Ahora supongamos que $g_{ij} = 0$, entonces $a_{ij} = 0$ y se cumple que $b_{ij} = 0$ o $c_{ij} = 0$. Si se tiene que $b_{ij} = 0$, entonces $e_{ij} = 0$ y por lo tanto $h_{ij} = 0$; por otro lado, si $c_{ij} = 0$ entonces $f_{ij} = 0$ y por lo tanto $h_{ij} = 0$ también.
   En cualquiera de las posibilidades se cumple que $g_{ij} = h_{ij}$. Por esto $G = H$.

Ejercicios recomendados: de la página 37 a la 39, del 1 al 28.

1.6 Estructuras matemáticas

No se evalúa.

Examen de autoevaluación

A continuación, usted encontrará 5 ejercicios de selección única. Marque con una X la letra de la opción escogida.

1. La sucesión $3, 8, 13, 18, \ldots$ está descrita por la fórmula:

(a) ( ) $a_n = 5n - 3$
(b) ( ) $a_n = 5n - 2$
(c) ( ) $a_n = 5a_{n-1} + 3$, $a_1 = 3$
(d) ( ) $a_n = a_{n-1} + 5$, $a_1 = -2$

2. El MCD$(1\,365, 2\,475)$ es

(a) ( ) 3
(b) ( ) 5
(c) ( ) 15
(d) ( ) 75

3. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, considere las afirmaciones: $3 \boxed{} A$ y $\{3, 5, 7\} \boxed{} A$, donde $\boxed{}$ sustituye a cualquiera de los símbolos: $\in$, $\notin$, $\subseteq$ y $\not\subseteq$. Entonces para que las afirmaciones sean verdaderas, $\boxed{}$ deben ser en forma correspondiente:

(a) ( ) $\in$ y $\subseteq$ (b) ( ) $\notin$ y $\subseteq$ (c) ( ) $\notin$ y $\subseteq$ (d) ( ) $\in$ y $\not\subseteq$

4. El conjunto $\{x \in \mathbb{Z}$ tal que $x^2 < 17\}$ también se puede representar como

(a) ( ) $\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4\}$ (b) ( ) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$
(c) ( ) $]-\sqrt{17}, \sqrt{17}[$ (d) ( ) $[0, \sqrt{17}[$

5. Si A es 3×4, B es 4×2 y C es 4×3 entonces el tamaño de la matriz ACB es

(a) ( ) 3×4 (b) ( ) no está definida
(c) ( ) 4×2 (d) ( ) 3×2

EJERCICIO 1. Usando diagramas de Venn, analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones: Recuerde que $A \oplus B := (A - B) \cup (B - A)$.

1. $A \oplus (B \cap C) = (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$
2. $A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$

EJERCICIO 2. Sean A y B subconjuntos de un conjunto universal U. Demuestre que:
$A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

EJERCICIO 3. Sean A y B subconjuntos de un conjunto universal U. Usando funciones características muestre que: $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

EJERCICIO 4. Pruebe que si p es primo y $p \mid (ab)$ entonces $p \mid a$ o $p \mid b$.

EJERCICIO 5. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcule: $A \wedge B$ y $A \odot B$

Soluciones a la Autoevaluación

Soluciones a los ejercicios de selección

1. Si x es entero y su cuadrado es menor que 17, es alguno de los números enteros entre -4 a 4.
   Opción (a).

2. Aunque $3 \in A$, se tiene que $7 \notin A$ por lo que $\{3, 5, 7\} \not\subseteq A$.
   Opción (d).

3. Note que los elementos van de 5 en 5 por lo que si $n = 1$, $a_1 = 5 - 2 = 3$, y en general $a_n = 5n - 2$.
   Opción (b).

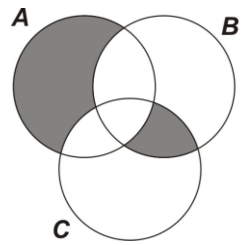
4. Se tiene que $1\,365 \div 15 = 91$ y $2\,475 \div 15 = 165$ y entre estos dos cocientes no hay factores comunes.
   Opción (c).

5. El producto CB no esta definido pues las matrices no son compatibles.
   Opción (b).

Soluciones a los ejercicios de desarrollo

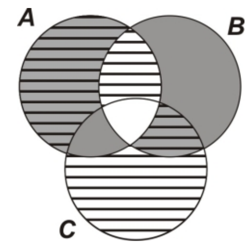
1. 1.

   En el diagrama de al lado sombreamos la región de A que no interseca a $B \cap C$ y la región de $B \cap C$ que no toca a A.

   $A \oplus (B \cap C)$

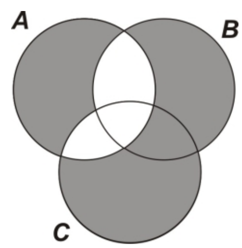
   En el otro, sombreamos $A \oplus B$ y con otra trama a $A \oplus C$ para luego buscar la región con las dos tramas. Al final se obtiene la misma región.

   $(A \oplus B) \cap (A \oplus C)$

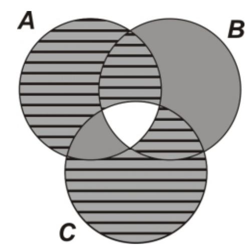
   2.

   Ahora sombreamos la parte de A que no toca a $B \cup C$ y la parte de $B \cup C$ que no toca a A.

   $A \oplus (B \cup C)$

   Luego sombreamos $A \oplus B$ y con otra trama a $A \oplus C$ para luego buscar la región que incluya todo lo sombreado. Por lo que no es la misma región.

   $(A \oplus B) \cup (A \oplus C)$

2. ($\Rightarrow$) Se demostrará que si $A \subseteq B$, entonces $\overline{B} \subseteq \overline{A}$. Sea $x \in \overline{B}$ entonces $x \notin B \Rightarrow x \in U$ y $x \notin A$ pues $A \subseteq B$ entonces $x \in \overline{A}$.

   ($\Leftarrow$) Por otro lado, se demostrará que si $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ entonces $A \subseteq B$. Sea $x \in A$, entonces $x \notin \overline{A}$ y como $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, entonces $x \in U$ y $x \notin \overline{B}$ entonces $x \in B$.

3. Al desarrollar las funciones características se tiene $f_{(A\oplus B)\oplus C}(x)$

   $$= f_{A\oplus B}(x) + f_C(x) - 2f_{A\oplus B}(x)f_C(x)$$
   $$= f_A(x) + f_B(x) - 2f_A(x)f_B(x) + f_C(x) - 2(f_A(x) + f_B(x) - 2f_A(x)f_B(x))f_C(x)$$
   $$= f_A(x) + f_B(x) + f_C(x) - 2f_A(x)f_B(x) - 2f_A(x)f_C(x) - 2f_B(x)f_C(x) + 4f_A(x)f_B(x)f_C(x)$$

   Por otro lado $f_{A\oplus(B\oplus C)}(x)$

   $$= f_A(x) + f_{B\oplus C}(x) - 2f_A(x)f_{B\oplus C}(x)$$
   $$= f_A(x) + f_B(x) + f_C(x) - 2f_B(x)f_C(x) - 2f_A(x)(f_B(x) + f_C(x) - 2f_B(x)f_C(x))$$
   $$= f_A(x) + f_B(x) + f_C(x) - 2f_A(x)f_C(x) - 2f_B(x)f_C(x) - 2f_A(x)f_B(x) + 4f_A(x)f_B(x)f_C(x)$$

   Y dado que son iguales, se concluye $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

4. Suponga que p no divide a a, entonces el máximo común divisor de p y a es 1, así, existen $r, s \in \mathbb{Z}$ tal que $ar + ps = 1$, entonces al multiplicar por b esta igualdad se

obtiene $(ab)r + pbs = b$ (se han colocado paréntesis para agrupar a (ab)) y como (ab) es un múltiplo de p, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $ab = pk$, sustituyendo esto en la igualdad $(ab)r + pbs = b$ se obtiene $pkr + pbs = b$, entonces $p(kr + bs) = b$, en otras palabras b es un múltiplo de p.

5. Los resultados son:

   1. $A \wedge B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
   2. $A \odot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Referencias de consulta

[1] Johnsonbaugh Richard, (1998) *Matemáticas Discretas*. Mexico: Pearson Prentice-Hall.

[2] Grimaldi, R. (1997). *Matemáticas discreta y combinatoria* Addison-Wesley Iberoamericana, tercera edición.

[3] Kenneth H. Rosen (2004) *Matemática Discreta y Aplicaciones*. España. McGraw-Hill.

[4] Kolman, B. et al (1997) *Estructuras de Matemáticas Discretas para la Computación.* Mexico: Pearson Prentice-Hall.

Algunos enlaces de interés

1. http://www.uam.es/personal__pdi/ciencias/gallardo/
2. http://www.dma.fi.upm.es/docencia/primerciclo/matdiscreta/